DER SAMMLUNG

DES

PAPPUS VON ALEXANDRIEN

SIEBENTES UND ACHTES BUCH

GRIECHISCH UND DEUTSCH

HERAUSGEGEBEN

VON

C. I. GERHARDT.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt

1871.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Ζ.

Πάππου Ἀλεξανδρέως συναγωγῆς ἕβδομον,

περιέχει δὲ λέμματα τοῦ ἀναλυομένου.

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα, καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος· τὸ μὲν γὰρ ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι καὶ ὡς ἐς, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων

Die Sammlung des Pappus von Alexandrien.
Siebentes Buch, welches die Hülfssätze zu dem rückwärts aufgelösten Ort enthält.

Der sogenannte rückwärts aufgelöste Ort, mein Sohn Hermodorus, ist, um es kurz zu sagen, ein eigener Uebungsstoff für diejenigen, welche mit den ersten Elementen vertraut, in der Geometrie die Fähigkeit zu erlangen wünschen, die Lösungen von vorgelegten Problemen zu finden, und ist nur für diesen Zweck zu gebrauchen. Wie aus den Schriften der drei Männer, Euklid's des Verfassers der Elemente, Apollonius' von Pergä und Aristäus' des Aelteren erhellt, dienen Analysis und Synthesis als Mittel dazu. Die Analysis ist ein Weg, von dem Gesuchten das als ausgemacht betrachtet wird, mittelst der sich daraus ergehenden Folgerungen zu dem synthetisch Feststehenden zu gelangen; in der Analysis nämlich setzen wir das Gesuchte als bereits vorhanden voraus und sehen zu, woraus dieses sich ergiebt, und ferner was diesem letzteren vorausgeht, bis dass wir so zurückschreitend auf etwas schon Bekanntes oder auf das was als Ausgangspunkt dienen kann, kommen. Diesen Weg nennen wir Analysis, gleichsam eine Rückwärtsauflösung. In der Synthesis dagegen schlagen wir den entgegengesetzten Weg ein, indem wir das zuletzt in der Analysis Gewonnene als bereits feststehend hinstellen, das dort Folgende hier als das Vorausgehende naturgemäss ordnen und zu einander in Zusammenhang bringen, und so zuletzt zur Construction des Gesuchten gelangen. Das nennen wir Synthesis. Die Analysis ist nun doppelter Art: einmal ist sie zum Suchen des Wahren behülflich, die speculative Analysis; zweitens vermittelt sie das Erfinden des Vorgesetzten, die Aufgaben lösende Analysis. In der speculativen Analysis setzen wir das Gesuchte als bestehend und als wahr voraus und gelangen durch die sich daraus ergebenden Fol-

ὡς ἀληθῶν καὶ ὥς ἐστι καθ' ὑπόθεσιν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προτεθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὅ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προτεθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. Διορισμὸς δέ ἐστι προδιαστολὴ τοῦ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη· Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, διωρισμένης τομῆς δύο,[1]) ἐπαφῶν δύο· Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγ̅, ὧν τὰς περιοχὰς μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐξεθέμην σοὶ πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων καὶ τῶν διορισμῶν καὶ τῶν πτώσεων καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐννενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ̅, τὸ δὲ δ̅ καὶ τὸ κ̅ ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδ̅ ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι̅[2]) ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτὰ

[1]) *διωρισμένης τομῆς δύο* fehlt in den Hdsch. *Halley* hat es hinzugesetzt.

[2]) ι̅ fehlt in den Hdsch.

gerungen, die wir als wahr annehmen, wie sie es auch nach der Voraussetzung sind, zu irgend einer Behauptung; wenn nun diese Behauptung wahr ist, so wird es auch das Gesuchte sein; der Beweis wird einen der Analysis entgegengesetzten Gang nehmen; kommen wir aber auf eine falsche Behauptung, so wird auch das Gesuchte falsch sein. Was nun die Aufgaben lösende Analysis anlangt, so setzen wir das vorgelegte Problem als bekannt voraus und gelangen durch die sich daraus ergebenden Folgerungen, die wir als wahr annehmen, zu irgend einer Behauptung; wenn nun diese Behauptung möglich und ausgemittelt ist, was die Mathematiker gegeben nennen, so wird auch das Problem möglich sein; auch hier wird der Beweis einen der Analysis entgegengesetzten Gang nehmen; kommen wir aber auf eine unmögliche Behauptung, so wird auch die Aufgabe unmöglich sein. Determination ist die Voruntersuchung, wann und wie und auf wie vielerlei Art die Aufgabe möglich ist. Soviel über Analysis und Synthesis.

Die oben erwähnten Schriften, die über den rückwärts aufgelösten Ort handeln, folgen so aufeinander: von Euklid ein Buch Data; von Apollonius zwei Bücher über den Verhältnissschnitt, zwei Bücher über den Raumschnitt, zwei Bücher über den bestimmten Schnitt, zwei Bücher über Berührungen; von Euklid drei Bücher über Porismen; von Apollonius zwei Bücher über Neigungen, zwei Bücher über ebene Oerter, acht Bücher über Kegelschnitte; von Aristäus fünf Bücher über körperliche Oerter; von Euklid zwei Bücher über Oerter auf der Oberfläche; von Eratosthenes zwei Bücher über mittlere Proportionallinien. Es sind dies drei und dreissig Bücher, von deren Inhalt, bis auf die Kegelschnitte des Apollonius, Kenntniss zu nehmen ich dir anempfehle, so wie auch von der Anzahl der Oerter, der Determinationen und der Fälle, die in jedem Buche vorkommen, desgleichen von den aufgesuchten Hülfssätzen; ich glaube in der Abhandlung über diese Bücher keine Frage unberücksichtigt gelassen zu haben.

Das erste Buch, welches die Data enthält, hat im Ganzen neunzig Lehrsätze, von denen die ersten drei und zwanzig sich auf Grössen im Allgemeinen beziehen, der vier und zwanzigste handelt von proportionalen Linien die nicht ihrer Lage nach gegeben sind, die folgenden vierzehn von Linien die ihrer Lage nach gegeben sind, die nächsten zehn von Dreiecken, die ihrer Gestalt nach, nicht ihrer Lage nach gegeben sind. die folgenden sieben von be-

ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἓξ ἐν παραλληλογράμμοις ἔτι καὶ παραβολαῖς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε τὸ μὲν πρῶτον γραφομενόν ἐστι, τὰ δὲ δ ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ ἕως τοῦ ο καὶ γ ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶ λόγοις πρὸς ἄλληλα· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἐφ᾽ ἑξῆς ἓξ διαγράμμασιν ἕως τοῦ ο καὶ θ, δύο μέν ἐστιν ἐπὶ τριγώνων, δ δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἑξῆς τρία ἐπὶ δύο εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, τὰ δ᾽ ἔστι δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ ἕως [illegible] ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει, [ὅτι] [1]) διαγομένων εὐθειῶν ἐστι διὰ δεδομένου σημείου τὰ γενόμενα δεδομένα.

Τῆς δ᾽ ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων δύο, πρότασίς ἐστι μία ὑποδιῃρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτω γράφω· διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν ὑποδιαιρέσεως γενομένης ἕνεκα, τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου, καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τῶν λόγου ἀποτομῆς τόπους ἑπτά, πτώσεις κδ, διορισμοὺς δὲ ε, ὧν τρεῖς μέν εἰσι μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ἕκτου καὶ τοῦ ζ τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ, πτώσεις δὲ ξγ, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ

[1]) Einschaltung von *Halley*.

liebigen geradlinigen ebenen Figuren, die ihrer Gestalt nach, aber nicht der Lage nach gegeben sind. Darauf kommen sechs Lehrsätze über Parallelogramme und über Anlegung von ebenen Figuren, die der Gestalt nach gegeben sind. Von den folgenden fünf Lehrsätzen ist der Inhalt des ersten eben angegeben, die vier andern handeln von dem Inhalt der Dreiecke, dass nämlich die Unterschiede der Potenzen der Seiten zu dem Flächeninhalt der Dreiecke ein gegebenes Verhältniss haben. Die folgenden sieben bis zum drei und siebzigsten beziehen sich auf zwei Parallelogramme, dass sie in Folge der Annahmen über die Winkel in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen; aus einigen derselben ergeben sich ähnliche Schlüsse für zwei Dreiecke. Von den nächsten sechs Lehrsätzen bis zum neun und siebzigsten handeln zwei über Dreiecke, die übrigen vier über mehrere proportionale gerade Linien. Die drei folgenden beziehen sich auf zwei proportionale d. i. eine gegebene ebene Figur einschliessende gerade Linien. In den übrigen acht bis zum neunzigsten Lehrsatze wird an Kreisen, die entweder nur der Grösse nach oder auch der Lage nach gegeben sind, dargethan, dass die Rechtecke, die aus den Abschnitten der durch einen gegebenen Punkt gezogenen Geraden entstehen gegeben sind.

Die beiden Bücher über den Verhältnissschnitt enthalten eine einzige in Unterabtheilungen zerfallende Aufgabe. Sie lautet: Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die von zwei der Lage nach gegebenen Geraden Segmente abschneidet, welche bis zu den in denselben Linien gegebenen Punkten gerechnet, ein gegebenes Verhältniss haben. Sie lässt eine Menge verschiedener Constructionen zu wegen der Unterabtheilungen, die gemacht werden, wegen der verschiedenen Lage der gegebenen Geraden zu einander und wegen der verschiedenen Lagen des gegebenen Punktes, so wie auch in Folge der Analysen und Synthesen derselben und der Determinationen. Es enthält das erste Buch des Verhältnissschnittes sieben Oerter, vier und zwanzig Fälle, fünf Determinationen, von denen drei Maxima, zwei Minima sind; ein Maximum findet statt im dritten Fall des fünften Ortes, die Minima in den zweiten Fällen des sechsten und des siebenten Ortes, die übrigen Maxima in den vierten Fällen des sechsten und

πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. λέμματα δὲ ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ. αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶ ρπα, κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων.

Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μέν ἐστι δύο, πρόβλημα δὲ κἂν τούτοις ἕν, ὑποδιαιρούμενον δίς· καὶ τούτων μία πρότασίς ἐστι τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ, μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν. ῥηθήσεται γὰρ οὕτω· διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ, πτώσεις κδ, διορισμοὺς ζ, ὧν τέσσαρες μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου. καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου τόπου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ τετάρτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τῶν χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ, πτώσεις δὲ ξ, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό. θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μη, τὸ δὲ δεύτερον ος.

Ἑξῆς [δὲ] [1]) τούτοις ἀναδέδονται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία δύο, ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστι λέγειν, διεζευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἑνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις, ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν ἤτοι πρὸς τὸ ὑπὸ [2]) μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης, ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομέων περιεχόμενον ὀρθογώνιον,

---

[1]) Einschaltung von *Snellius*. Vergl. Wilebrordi Snellii Apollonius Batavus seu exsuscitata Apollonii Pergaei *περὶ διωρισμένης τομῆς* Geometria. Lugd. 1608. 4.

[2]) Die Hdsch. haben *ἀπὸ*.

des siebenten Ortes. Das zweite Buch des Verhältnissschnittes hat vierzehn Oerter, drei und sechzig Fälle, die Determinationen des ersten Buchs, denn es bezieht sich ganz auf das erste. Beide Bücher des Verhältnissschnittes enthalten zwanzig Lemmata und hundert und ein und achtzig Theoreme, oder auch, wie Perikles will, noch mehr.

In den beiden Büchern über den Raumschnitt giebt es ebenfalls nur ein Problem, das in zwei Theile zerfällt. Auch ist die einzige darin vorgelegte Frage der vorhergehenden ähnlich, und es findet allein der Unterschied statt, dass in jener die beiden abgeschnittenen geraden Linien ein gegebenes Verhältniss haben, während hier sie ein gegebenes Rechteck bilden sollen. Sie lautet nämlich folgendermassen: Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die von zwei der Lage nach gegebenen Geraden Stücke abschneidet, welche bis zu den in denselben Linien gegebenen Punkten gerechnet ein einem gegebenen Rechteck gleiches einschliessen. Auch sie bietet aus denselben Gründen eine Menge von Constructionen. Das erste Buch des Raumschnitts hat sieben Oerter, vier und zwanzig Fälle und sieben Determinationen, von denen vier Maxima, drei Minima sind. Die Maxima sind bei dem zweiten Fall des ersten Ortes, bei dem ersten Fall des zweiten Ortes, bei dem zweiten Fall des vierten Ortes und bei dem dritten Fall des sechsten Ortes; die Minima sind bei dem dritten Fall des dritten Ortes, bei dem vierten Fall des vierten Ortes und bei dem ersten Fall des sechsten Ortes. Das zweite Buch des Raumschnitts enthält dreizehn Oerter, sechzig Fälle und die Determinationen aus dem ersten Buche, auf welches es sich bezieht. Das erste Buch hat acht und vierzig Theoreme, das zweite deren sechs und siebzig.

Hieran reihen sich zwei Bücher über den bestimmten Schnitt, in welchen ebenfalls wie in den vorhergehenden nur eine einzige Aufgabe, jedoch in verschiedene Fälle getheilt, zu finden ist, nämlich: Eine gegebene unbegränzte Gerade in einem Punkte zu schneiden, so dass von den Segmenten zwischen diesem und den in der Linie gegebenen Punkten entweder das Quadrat des einen oder das Rechteck aus beiden Segmenten ein gegebenes Verhältniss hat entweder zu dem Rechteck aus dem einen Segment und einer andern gegebenen Linie, oder zu dem Rechteck aus zwei Segmenten, auf welcher Seite der gegebenen Punkte man sie an-

ἐφ᾽ ὁποτέρᾳ χρῇ τῶν [1]) δοθέντων σημείων. καὶ ταύτης, ἅτε δίς διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης, διὰ πλειόνων ἡ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης. δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος μὲν πάλιν ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοχείων Εὐκλείδου, καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δείξασιε [2]) καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίωι. ἔχει δέ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ἕξ, ἐπιτάγματα ις, διορισμοὺς δὲ ε, ὧν μεγίστους μὲν δ, ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καὶ εἰσὶ μέγιστοι μὲν ὅ,τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πέμπτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς, ὧν εἰσὶν ἐλάχιστοι μὲν ὅ,τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος. λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζ, τὸ δὲ δεύτερον κδ· θεωρημάτων δέ ἐστι τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγ.

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστι βιβλία δύο. προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων, κύκλον ἀγαγεῖν δι᾽ ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα. ἤτοι γὰρ τὰ δεδομένα τρία σημεῖα, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα. ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ τετάρτῳ βιβλίῳ

---

[1]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben: ἐφ᾽ ὁπότερα χρηστῶν δοθέντων.

[2]) So *Halley*; die Hdsch. haben δείξαντος.

nehmen mag. Insofern diese Aufgabe in zwei Theile zerfällt und verwickelte Determinationen enthält, so musste nothwendig ihre Darlegung umständlicher geschehen. Apollonius löst sie, indem er einmal auf gewöhnlichere Weise lediglich mit Hülfe gerader Linien es versucht, ganz so wie im zweiten Buch der Elemente Euklid's es geschieht, und sodann mehr zur Unterweisung und auf eine geistreiche Art durch Halbkreise. Das erste Buch enthält sechs Aufgaben, sechzehn Anordnungen, fünf Determinationen, von denen vier Maxima, eine ein Minimum ist; die Maxima befinden sich in der zweiten Anordnung der zweiten Aufgabe, in der dritten Anordnung der vierten Aufgabe, in der dritten Anordnung der fünften Aufgabe und in der dritten Anordnung der sechsten Aufgabe; das Minimum in der dritten Anordnung der dritten Aufgabe. Das zweite Buch über den bestimmten Schnitt hat drei Aufgaben, neun Anordnungen, drei Determinationen, von denen Minima sind in der dritten Anordnung der ersten Aufgabe und in der dritten Anordnung der zweiten Aufgabe, ein Maximum aber in der dritten Anordnung der dritten Aufgabe. Das erste Buch enthält sieben und zwanzig Lemmata, das zweite vier und zwanzig; in beiden zusammen finden sich drei und achtzig Theoreme.

Hierauf folgen zwei Bücher über Berührungen. In denselben scheinen mehrere Aufgaben enthalten zu sein, wir fassen sie aber in eine einzige zusammen, die so lautet: Wenn der Reihe nach von Punkten, geraden Linien, Kreisen beliebig drei der Lage nach gegeben sind, durch einen jeden der gegebenen Punkte, wenn nämlich Punkte gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, so dass er eine jede der gegebenen Linien berührt. Wegen der Mannigfaltigkeit des in den Voraussetzungen Gegebenen, das gleichartig oder ungleichartig sein kann, entstehen nothwendig zehn verschiedene Fälle, denn drei ungleichartige Dinge lassen sich, wenn man von ihrer Reihenfolge absieht, zu dreien zehnmal combiniren. Es sind nämlich gegeben entweder drei Punkte, oder drei gerade Linien, oder zwei Punkte und eine Gerade, oder zwei Gerade und ein Punkt, oder zwei Punkte und ein Kreis, oder zwei Kreise und ein Punkt, oder zwei Gerade und ein Kreis, oder zwei Kreise und eine Gerade, oder ein Punkt, eine gerade Linie und ein Kreis, oder drei Kreise. Von diesen Fällen werden die beiden ersten im vier-

τῶν πρώτων στοιχείων, ὅπερ ἢ μὲν γράφων·[1]) *τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων, μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστι τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι· τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι· τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς τοῦ β̅ ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις πάντων. καὶ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων καὶ προςανέδωκάν τισι πρότερον τε*[2]) *τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτον γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι οὕτως ἔχει· ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψει τῷ μεγέθει δοθέντα διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν. αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ, ἐκ τριῶν γὰρ διαφορῶν τινῶν δυάδες ἄτακτοι διαφοραὶ γίγνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον ἀγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται. ταῦτα δέ ἀναλύσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίσασθαι κατὰ πτῶσιν. ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ἑπτὰ, τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ̅. λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα̅, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ξ̅.*

---

[1]) So die Hdsch. oder *ὃ περὶ μὲν γράφων*; vielleicht ist *ὃ παρέη γράφων* zu lesen.

[2]) So die Hdsch.; *Halley* hat diese Stelle so emendirt: *προςανέδωκα δὲ τινες προτέρῳ τῶν* etc.

ten Buch der Elemente dargethan, weshalb er sie bei Abfassung seiner Schrift überging, (wenn nämlich drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte gegeben sind, so ist das dasselbe als wenn um ein Dreieck ein Kreis zu beschreiben ist, und wenn drei nicht parallele, einander schneidende Linien gegeben sind, so ist dies gleich als ob ein Kreis einem Dreieck eingeschrieben werden soll) denn es wird die Aufgabe, wenn zwei parallele und eine sie schneidende Linie gegeben sind, gleichsam als ein besonderer Theil des zweiten Falles, allen andern vorausgeschickt. Dies und die folgenden sechs Fälle befinden sich in dem ersten Buche, die beiden übrigen, wenn zwei Gerade und ein Kreis, und wenn drei Kreise gegeben sind, enthält das zweite Buch, da die Lagen der Kreise und der Geraden zu einander mannigfach und mehrfache Determinationen nöthig sind. Den erwähnten Berührungen ist eine Sammlung von Aufgaben verwandt, die von den Herausgebern unbeachtet geblieben ist, einige aber haben sie dem ersten der beiden genannten Bücher hinzugefügt; denn sie war übersichtlich und zur Einführung passend abgefasst, auch vollständig und zur Ergänzung in Betreff der Lehre von den Berührungen geeignet. Auch sie lassen sich alle in einen Satz zusammenfassen, der dem obigen in Betreff der Voraussetzung nachsteht, aber in der Anordnung leichter ist; er lautet so: Wenn von beliebigen Punkten, Geraden und Kreisen zwei gegeben sind, einen der Grösse nach gegebenen Kreis zu construiren, der durch einen oder die beiden Punkte, wenn nämlich Punkte gegeben sind, geht und eine jede der gegebenen Linien berührt. Dieser Satz enthält sechs Aufgaben, denn aus drei verschiedenen Dingen entstehen, wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird, durch Combination zu zwei sechs verschiedene Fälle, nämlich wenn entweder zwei Punkte, oder zwei Gerade, oder zwei Kreise, oder ein Punkt und eine Gerade, oder ein Punkt und ein Kreis, oder eine Gerade und ein Kreis gegeben sind, einen der Grösse nach gegebenen Kreis zu ziehen, wie oben gesagt ist. Davon sind die Analysen, Synthesen und Determinationen in jedem einzelnen Falle zu machen. Das erste Buch von den Berührungen hat sieben Aufgaben, das zweite deren vier. Die beiden Bücher enthalten ein und zwanzig Lemmata und sechzig Theoreme.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. οὐδὲν προσιεθείκασι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν, ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς ἐδείξαμεν, τὴν δ᾽ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν· ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶν οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας, ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ᾽ ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὴν δὲ διαφορὰν τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων· ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ᾽ ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο καὶ ἐλεγχομένων ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων. ἔγραψαν δὲ ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως· πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσιν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων, ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶ ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι[1] *τῶν πρὸς μεσότητας. συμβέβηκε δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ*

---

[1]) So *Halley*; die Hdsch. haben *ἐπὶ*.

An die Schrift über die Berührungen reihen sich Euklid's Porismen in drei Büchern; es ist dies eine in vieler Hinsicht sehr kunstreiche Sammlung zur Analysis von schwierigeren Problemen und von Fällen, welche die Natur in unbegränzter Zahl darbietet. Dem was Euklid als der erste darüber geschrieben hat, ist nichts hinzugefügt worden, ausgenommen etwa, dass ehedem unverständige Leute einigen wenigen noch eine andere Fassung hinzusetzten, denn von der beschränkten Anzahl von Darstellungen, die ein jedes, wie wir gezeigt, bietet, hat Euklid nur eine und zwar die am meisten einleuchtende gegeben. Die Porismen gewähren eine feine, in der Natur begründete, zugleich nothwendige und sehr allgemeine Betrachtung, die für diejenigen, die sehen und ausmitteln können, interessant ist. Sie alle haben weder das Aussehen von Theoremen noch von Problemen, sondern fallen gewissermassen in die Mitte zwischen beiden, so dass sie entweder als Theoreme oder als Probleme gefasst werden können; daher ist es denn auch gekommen, dass viele Geometer sie zu den Theoremen rechneten, andere zu den Problemen, indem sie lediglich auf die Form der Fassung sahen. Die Alten aber erkannten den Unterschied dieser drei Gattungen besser, wie aus den Definitionen erhellt; sie nannten nämlich Theorem den Satz, der zum Behuf des Beweises vorgelegt wird, Problem das, dessen Construction gefunden werden soll, Porisma aber das, worin das Vorgelegte zu ermitteln ist. Diese Definition eines Porisma ist von Spätern abgeändert worden, denn sie vermochten nicht alles zu ermitteln, sondern berücksichtigten nur die ersten Forderungen, indem sie nur das zeigten, was gesucht wird, nicht aber ermittelten, und demnach sich nicht nach dem richteten, was die Definition und die dazu gegebene Anleitung vorschreiben. Sie stellten folgende Definition auf, die in gewissen Fällen zutrifft: Porisma ist dasjenige, dem die zu einem Ortstheorem gehörende Voraussetzung mangelt. Eine besondere Art von dergleichen Porismen sind die Oerter; sie finden sich häufig in den Schriften, die von dem rückwärts aufgelösten Ort handeln. Man hat sie von den Porismen gesondert, zusammengestellt, mit Aufschriften versehen und so verbreitet, da sie sich über ein grösseres Gebiet als die andern Arten erstrecken. Von den Oertern sind nämlich die einen ebene, andere körperliche, andere lineare, hierzu kommen noch die, welche sich auf mittlere Proportionalen beziehen. Bei den Porismen findet sich noch der

μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα *) δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματα ἕνεκα τῆς πολυπληθίας, ἐν ῇ ὀλίγα πρὸς ἀρχὴν δεδομένων τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ, παρ᾽ ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα τὸ πλῆθος. διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν· ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα ἢ παραλλήλου ἑτέρᾳ τὰ δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ᾽ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τοῦτ᾽ ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἢ καθολικώτερον οὕτως· ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμόν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τριῶν μὴ πρὸς γωνίαν ὑπάρχον τριγώνου χωρίου, ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ᾽ ἀρχὴν μόνην τάξαι· καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβλημένας, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσι διαφόροις συμβέβηκε. ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων. ἐν ἀρχῇ μὲν τὸ ἕβδομον διάγραμμα τοῦτο· ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνῃ δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ᾽ αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ

*) So *Halley*; die Hdsch. haben ἥδιστα.

Umstand, dass die Fassung sehr kurz und zusammengedrängt ist, indem vieles, was man zu ergänzen pflegt, versteckt liegt, so dass viele Geometer sie nur zum Theil auffassen, die nothwendigeren Punkte aber nicht verstehen. Viele in einen Satz zusammenzufassen ist gar nicht möglich, da Euklid selbst nicht viel von jeder Art gegeben hat, sondern in Anbetracht der grossen Anzahl nur Proben; hiervon hat er einige wenige gleichartige, etwa zehn, die zu jener zahlreicheren Art von Oertern gehören, zu Anfang des ersten Buchs zusammengestellt. Desshalb ist es möglich, diese in einen Satz zusammenzufassen, den wir so ausdrücken: Wenn auf der einen von zwei convergenten Linien oder auf der einen von zwei Parallelen drei Punkte gegeben sind, die übrigen aber ausser einem in einer der Lage nach gegebenen Geraden liegen, so wird auch dieser letztere auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegen. Dies wird aber nur von vier Geraden behauptet, von welchen nicht mehr als zwei durch denselben Punkt gehen; es ist bisher unbekannt, dass dieser Satz für eine beliebige Anzahl Geltung hat und so lautet: Wenn beliebig viele Gerade sich schneiden, jedoch so, dass nicht mehr als zwei durch denselben Punkt gehen, alle Punkte aber auf einer derselben gegeben sind und ein jeder der auf einer andern Geraden liegenden Punkte auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegt, oder allgemeiner: Wenn beliebig viele Gerade sich schneiden, jedoch so, dass nicht mehr als zwei durch denselben Punkt gehen, alle Punkte aber in der einen derselben gegeben sind, ein jeder der übrigen aber, deren Anzahl eine Triangularzahl, auf der Seite dieses Dreiecks sich befindet; und zwar so, dass er auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegt und drei davon nicht die Spitzen eines Dreiecks bilden, so wird ein jeder andere Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegen. Es ist nicht wahrscheinlich, dass der Verfasser der Elemente dies nicht gewusst haben sollte, er wollte vielmehr nur die Grundlage feststellen, ebenso wie er auch in allen seinen Porismen offenbar nur die ersten Anfänge und den Samen von zahlreichen und grossen Gruppen ausgestreut hat, von denen man eine jede nicht nach der Verschiedenheit der Annahmen anordnen muss, sondern nach dem, worin sie sich durch das zufällig Hinzukommende und durch das Gesuchte unterscheiden. Alle Annahmen unterscheiden sich von einander, da sie sehr specieller Natur sind, hingegen ist jedes zufällig Hinzukommende und jedes Gesuchte, indem es ein und dasselbe bleibt, in vielen verschiedenen Annahmen vorhanden. Im ersten Buche ist nun in Rücksicht auf das in den vorgelegten Sätzen Gesuchte folgende Zusammenstellung zu machen. Zuerst lautet der siebente Satz so: Wenn von zwei gegebenen Punkten zwei Gerade nach einer der Lage nach gegebenen Geraden gehen und die eine auf einer der Lage nach gegebenen Geraden bis zu dem auf ihr gegebenen Punkte ein

ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα· ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς· ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆςδε πρὸς τήνδε δοθείς· ὅτι λόγος τῆςδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆςδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆςδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην·[1]) ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆςδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὁ μέν τι δοθέν ἐστιν, ὁ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος ἐστὶν, ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆςδε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ [τῆς][2]) ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆςδε καὶ τῆςδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας. ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομὴν [ἢ][3]) μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ συναμφοτέρων τῶνδε

[1]) So *Halley*; die Hdsch. haben *κατηγμένης*.

[2]) Einschaltung von *Halley*.

[3]) Einschaltung von *Halley*.

Stück abschneidet, so schneidet auch die andere auf einer andern ein Stück ab, das ein gegebenes Verhältniss hat; und in den folgenden Sätzen heisst es: Dass dieser Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Linie liegt; dass das Verhältniss dieser Geraden zu der gegeben ist; dass das Verhältniss dieser Geraden zu einem Abschnitt gegeben ist; dass diese Gerade der Lage nach gegeben ist; dass diese Gerade durch einen gegebenen Punkt geht; dass das Verhältniss dieser Geraden zu einer gewissen, die von diesem Punkt bis zu einem gegebenen geht, gegeben ist; dass das Verhältniss dieser Geraden zu einer gewissen von diesem Punkte gezogenen gegeben ist; dass das Verhältniss dieses Rechtecks zu dem aus einer gegebenen Geraden und dieser Geraden construirten gegeben ist; dass die eine Seite dieses Rechtecks gegeben ist, die andere ein Verhältniss zu einem Segment hat; dass dieses Rechteck oder ein solches nebst irgend einem gegebenen Rechteck gegeben ist, jenes aber ein Verhältniss zu einem Segment hat; dass diese Gerade zugleich mit einer solchen, zu der sie ein gegebenes Verhältniss hat, ein Verhältniss zu einer gewissen Geraden zwischen diesem und einem gegebenen Punkt hat; dass der Raum zwischen einem gegebenen Punkt und dieser Geraden gleich ist dem zwischen einem gegebenen Punkt und der Geraden zwischen diesem und einem gegebenen Punkt; dass das Verhältniss dieser und dieser Geraden zu irgend einer zwischen diesem und einem gegebenen Punkt gegeben ist; dass diese Gerade von zwei der Lage nach gegebenen Geraden Segmente abschneidet, die ein gegebenes Rechteck einschliessen. In dem zweiten Buche sind die Voraussetzungen andere, das Meiste aber von dem Gesuchten stimmt mit dem im ersten Buche überein; ausserdem findet sich folgendes darin: dass dieses Rechteck entweder allein oder zugleich mit einem gegebenen ein Verhältniss zu einem Segment habe; dass das Verhältniss des Rechtecks aus diesen zum Segment gegeben ist; dass das Verhältniss des Rechtecks aus der Summe dieser beiden Geraden und aus der Summe dieser beiden Geraden zu einem Segment gegeben ist; dass das Rechteck aus dieser Geraden und aus dieser vermehrt um eine Gerade, zu welcher diese ein gege-

πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆςδε καὶ συναμφοτέρου τῆςδε τε καὶ τῆς πρὸς ἥν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα καὶ τὸ ὑπὸ τῆςδε καὶ τῆς πρὸς ἥν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε. ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσὶν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆςδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ [τῆς] [1]) ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆςδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι συναμφότερος καὶ πρὸς ἥν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἐν τῇ παραθέσει ἔσται ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα.

Τόπων ἐπιπέδων δύο.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μέν εἰσιν ἐφεκτικοὶ, οὕς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοὶ, ὡς σημείου μὲν γραμμὴν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν· οἱ δὲ ἀναστροφικοὶ, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν δέθει δεδο-

---

[1]) Einschaltung von *Halley*.

benes Verhältniss hat, nebst dem Rechteck aus dieser Geraden und der, zu welcher diese ein gegebenes Verhältniss hat, ein gegebenes Verhältniss zu einem Segment hat; dass das Verhältniss beider zu einer gewissen Geraden zwischen diesem und einem gegebenen Punkt gegeben ist; dass das Rechteck aus diesen Geraden gegeben ist. In dem dritten Buche beziehen sich die meisten Annahmen auf Halbkreise, einige wenige auf den Kreis und die Kreissegmente; in Betreff des Gesuchten ist das Meiste fast eben so wie in den vorhergehenden Büchern, nur Folgendes kommt neu hinzu: Dass das Verhältniss des Rechtecks aus diesen Geraden zu dem aus diesen Geraden gegeben ist; dass das Verhältniss des Quadrats über dieser Geraden zu einem Segment gegeben ist; dass das Rechteck aus diesen Geraden dem Rechteck aus einer gegebenen Geraden und der zwischen diesem und einem gegebenen Punkt gleich ist; dass das Quadrat über dieser Geraden gleich ist dem Rechteck aus einer Senkrechten von einem gegebenen Punkte und aus einem Abschnitt zwischen der Senkrechten und einem gegebenen Punkte; dass die Summe zweier Geraden und dazu die, zu welcher diese ein gegebenes Verhältniss hat, zu einem Segment ein gegebenes Verhältniss haben; dass es einen Punkt giebt, so dass die von ihm hierher gezogenen Geraden ein der Form nach gegebenes Dreieck bilden; dass es einen Punkt giebt, dass die von ihm hierher gezogenen Geraden gleiche Bogen abschneiden; dass diese Gerade parallel sein wird oder mit einer Geraden, die durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Winkel bildet. Die drei Bücher Porismen enthalten acht und dreissig Lemmata, die Anzahl der Theoreme ist hundert ein und siebzig.

Zwei Bücher ebener Oerter.

Die Oerter werden allgemein eingetheilt in solche, die an ihrer Stelle haften, es sind die, von welchen Apollonius selbst Eingangs seiner Elemente spricht, wenn nämlich der Ort eines Punktes ein Punkt, der Ort einer Linie eine Linie, der Ort einer Oberfläche eine Oberfläche, der Ort eines Körpers ein Körper ist; ferner in fortschreitende, wenn der Ort eines Punktes eine Linie, der Ort einer Linie eine Oberfläche, der Ort einer Oberfläche ein Körper ist; ferner in solche, die durch zwiefache Bewegung entstehen, wenn der Ort eines Punktes eine Oberfläche, der Ort einer

μένων ἐφεκτικοί εἰσιν, οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι καὶ οἱ στερεοὶ [καὶ][1]) γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων, οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοὶ μέν εἰσι σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν· οἱ μέντοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καὶ καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαί τε καὶ γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαὶ, παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί· γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται, ὅσοι γραμμαί εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι οὔτε κύκλοι οὔτε τις τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει, ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων[2]) ἐκείνοις. οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τούτων τόπων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προςέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προςγράφειν οὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προκείμενα[3]) ὕστερα, τὰ δ' ἐκ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ· ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρου γ συμφωνεῖ ταῦτα· ἐὰν

[1]) Einschaltung von *Halley*.

[2]) Die Hdsch. bemerken hier keine Lücke, jedenfalls fehlt aber ein Wort.

[3]) Vielleicht ist zu lesen *προσκείμενα*.

Linie ein Körper ist. Von den Oertern, die in den Schriften über den rückwärts aufgelösten Ort vorkommen, sind diejenigen, welche zu dem der Lage nach Gegebenen gehören, an ihre Stelle haftende; die sogenannten ebenen Oerter, desgleichen die körperlichen und die linearen sind fortschreitende, wenn sie sich auf Punkte beziehen; die Oerter an der Oberfläche sind durch zwiefache Bewegung entstanden, wenn sie zu Punkten gehören, dagegen fortschreitende, wenn sie sich auf Linien beziehen; die linearen Oerter werden ja mittelst derer an der Oberfläche dargethan. Ebene Oerter, von welchen nämlich hier die Rede ist, werden im Allgemeinen alle die genannt, welche gerade Linien oder Kreislinien sind; körperliche Oerter alle die, welche Kegelschnitte sind, als Parabeln, Ellipsen, Hyperbeln; lineare Oerter endlich alle die Linien, die weder gerade noch Kreislinien sind, noch zu den erwähnten Kegelschnitten gehören. Die Oerter, welche Eratosthenes Oerter in Bezug auf mittlere Proportionallinien überschrieben hat, sind von derselben Art, wie die erwähnten, (unterscheiden sich) aber von jenen hinsichtlich der eigenthümlichen Voraussetzungen. Die Alten haben in Betreff dieser ebenen Oerter eine Reihenfolge festgestellt und ein Lehrbuch darüber verfasst; hiervon sind aber die Späteren abgewichen und haben andere hinzugesetzt, ohne zu bedenken, dass ihre Anzahl unbegränzt ist, wenn man noch solches hinzunehmen wollte, was in jener Reihenfolge nicht enthalten ist. Ich will nun das Hinzugefügte später anführen, das aber, was zu jener Reihenfolge gehört, voranschicken und in den einen Satz zusammenfassen: Wenn von einem oder von zwei gegebenen Punkten zwei Gerade gezogen werden, die entweder in eine Gerade zusammenfallen oder parallel sind oder einen gegebenen Winkel einschliessen, und entweder ein gegebenes Verhältniss zu einander haben oder ein gegebenes Rechteck einschliessen, und wenn der Endpunkt der einen in einem der Lage nach gegebenen ebenen Ort liegt, so wird auch der Endpunkt der andern in einem der Lage nach gegebenen ebenen Ort liegen, der bald von derselben, bald von anderer Art ist, bald ähnlich liegt rücksichtlich der geraden Linie, bald die entgegengesetzte Lage hat; dies richtet sich nach den verschiedenen Bedingungen. Was nun die von Charmander Eingangs hinzugefügten drei Sätze betrifft, so kommen sie mit den folgenden überein:

εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα· ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας θέσει δεδομένης. ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο εὐθείας παραλλήλους ἢ συμπιπτούσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον, ἢ ὧν ἡ μία μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα δεδομένη ἐστίν, ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ καταγμένης μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἄλλης κατηγμένης, καὶ τῶν λοίπων ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε· ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσι, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέ-

Wenn der eine Endpunkt einer der Grösse nach gegebenen Geraden gegeben ist, so liegt der andere auf der inneren Seite einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn aus zwei gegebenen Punkten zwei Gerade gezogen werden, die einen gegebenen Winkel einschliessen, so liegt ihr Durchschnittspunkt auf der inneren Seite einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn die Basis eines der Grösse nach gegebenen Dreiecks der Lage und der Grösse nach gegeben ist, so liegt die Spitze desselben auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Die übrigen Sätze sind die folgenden: Wenn der eine Endpunkt einer der Grösse nach gegebenen Geraden, die mit einer der Lage nach gegebenen Geraden gleiche Richtung hat, auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegt, so liegt auch der andere Endpunkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Wenn von einem Punkte an zwei der Lage nach gegebene Gerade, die entweder parallel oder convergent sind, unter gegebenen Winkeln zwei Gerade gezogen werden, die entweder zu einander ein gegebenes Verhältniss haben oder von welchen die eine zugleich mit der, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniss hat, gegeben ist, so liegt der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Und wenn beliebig viele Gerade der Lage nach gegeben sind und zu ihnen von einem beliebigen Punkte gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn das Rechteck aus einer gegebenen und einer gezogenen Linie zugleich mit dem Rechteck aus einer gegebenen und einer andern gezogenen Linie dem Rechteck aus einer gegebenen und einer andern gezogenen Linie gleich ist, und ähnlich so weiter, so liegt der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Wenn von einem beliebigen Punkte an zwei der Lage nach gegebene Parallelen gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die entweder bis zu den auf den Parallelen gegebenen Punkten Stücke abschneiden die ein gegebenes Verhältniss haben, oder eine gegebene ebene Figur einschliessen, oder von der Beschaffenheit sind, dass die Summe oder der Unterschied der gegebenen über den gezogenen Geraden construirten Figuren einer gegebenen ebenen Figur gleich ist, so liegt der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Das zweite Buch enthält folgendes: Wenn von zwei gegebenen Punkten Gerade nach einem dritten Punkt gehen und wenn die darüber construirten Quadrate sich um eine gegebene ebene Figur unterscheiden, so liegt der Punkt

σει δεδομένης εὐθείας. ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην[1]*, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει ἢ καὶ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι*[2] *μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παραθέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης. τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. ἐὰν ἐν κύκλῳ θέσει δεδομένῳ δοθέν τι σημεῖον ᾖ καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης ἢ τὸ μόνον ἢ τοῦτό*[3] *τε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν τὸ σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ, λήμματα δὲ ὀκτώ.*

---

[1]) So hat *Halley* diese Stelle emendirt; die Hdsch. haben *ἀχθῇ καὶ ἐπὶ τὴν θέσιν.*

[2]) So *Halley*; die Hdsch. haben *δοθὲν.*

[3]) So emendirt *R. Simson* diese Stelle; die Hdsch. haben *τῷ μόνῳ ἢ τούτῳ τε καὶ τῷ.*

auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Stehen aber die Linien in einem gegebenen Verhältniss, so liegt der Punkt entweder auf einer der Lage nach gegebenen Geraden oder auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn eine Gerade der Lage nach und auf ihr ein Punkt gegeben ist, von welchem eine begränzte gerade Linie gezogen wird, wenn ferner von dem Endpunkt derselben auf die der Lage nach gegebene Gerade eine Senkrechte gefällt wird und das Quadrat über der begränzten Linie dem Rechteck aus einer gegebenen Geraden und dem Stück, welches die Senkrechte bis zu dem gegebenen Punkte oder bis zu einem andern gegebenen Punkte auf der der Lage nach gegebenen Geraden abschneidet, gleich ist, so liegt der Endpunkt der begränzten Linie auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn von zwei gegebenen Punkten Gerade nach einem dritten Punkt gezogen werden und wenn das Quadrat über der einen um ein gegebenes Rechteck grösser ist als das Quadrat über der andern oder das erstere zu dem letzteren in einem gegebenen Verhältniss steht, so liegt der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn von beliebig vielen gegebenen Punkten Gerade nach einem Punkt gezogen werden und wenn die über allen construirten ebenen Figuren einer gegebenen ebenen Figur gleich sind, so liegt der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn von zwei gegebenen Punkten Gerade nach einem Punkt gezogen werden und von diesem Punkt eine zu einer andern Parallele, die auf einer der Lage nach gegebenen Geraden bis zu einem gegebenen Punkte ein Stück abschneidet, und wenn die über den zuerst gezogenen Linien construirten ebenen Figuren dem Rechteck aus einer gegebenen Linie und dem abgeschnittenen Stück gleich sind, so liegt der dritte Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. Wenn in einem der Lage nach gegebenen Kreise ein beliebiger Punkt gegeben, durch diesen eine beliebige Gerade gezogen und auf ihr ein beliebiger Punkt ausserhalb des Kreises angenommen wird, und wenn entweder das Quadrat über der Linie zwischen diesen beiden Punkten allein oder dieses Quadrat nebst dem Rechteck aus den beiden innerhalb des Kreises liegenden Stücken gleich ist dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem ausserhalb des Kreises liegenden Stück, so liegt der ausserhalb des Kreises angenommene Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. Und wenn dieser letztere Punkt auf einer der Lage

Νεύσεων δύο.

Νεύειν λέγεται γραμμὴν ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. καθόλου δὲ τὸ αὐτό ἐστιν, ἐάν τε ἐπὶ δοθὲν νεύειν σημεῖον λέγηται, ἐάν τε ἐστί τι ἐπ' αὐτῆς δοθὲν, ἐάν τε διὰ δοθέντος ἐστὶ σημείου. ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα νεύσεις ἀπὸ ἑνὸς τῶν εἰρημένων. προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου· δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον. ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων, ἃ μὲν ἦν ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεὰ, ἃ δὲ γραμμικά. τῶν [δὲ] [1]) ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα, ἔδειξάν τε προβλήματα ταῦτα· θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου· καὶ ῥόμβου δοθέντος καὶ ἐπεκβεβλημένης μιᾶς πλευρᾶς, ἁρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεῖαν νεύουσαν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν· καὶ θέσει δοθέντος κύκλου, ἐναρμόσαι εὐθεῖαν μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθέν. τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις τέσσαρας, [2]) καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον δύο· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει [τὸ] [3]) ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης δέκα, ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαιρέσεις πλείονες διοριστικαὶ ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας.

---

[1]) Einschaltung von *Halley*.

[2]) *Horsley* bemerkt: legendum *πέντε*.

[3]) Einschaltung von *Halley*.

nach gegebenen Geraden liegt, der Kreis aber nicht vorausgesetzt wird, so liegen die auf beiden Seiten des gegebenen Punktes angenommenen Punkte auf ein und derselben der Lage nach gegebenen Kreislinie. Die beiden Bücher über die ebenen Oerter enthalten hundert sieben und vierzig Lehrsätze und acht Lemmata.

Zwei Bücher über Neigungen gerader Linien.

Von einer Geraden sagt man, dass sie sich einem Punkt zuneigt, wenn sie verlängert denselben trifft. Im Allgemeinen ist es gleich, ob man sagt, dass sie sich einem gegebenen Punkt zuneigt, oder ob ein Punkt auf ihr gegeben ist, oder ob sie durch einen gegebenen Punkt geht. Man hat von einem dieser Ausdrücke die Ueberschrift „Neigungen" entnommen. Es giebt ein allgemeines Problem, welches so lautet: Zwischen zwei Linien, die der Lage nach gegeben sind, eine der Grösse nach gegebene Gerade so zu legen, dass sie sich einem gegebenen Punkt zuneigt. Da in Betreff dieser Geraden die einzelnen Probleme verschiedene Voraussetzungen hatten, so waren die einen ebene, andere körperliche, noch andere lineare. Von den ebenen Problemen hat man die in vieler Hinsicht nützlichen ausgewählt und dargethan, nämlich: Ein Halbkreis und eine auf dem Durchmesser senkrechte Linie, oder zwei Halbkreise, deren Durchmesser auf einer Linie liegen, sind gegeben, es soll eine der Grösse nach gegebene Gerade, die sich einem Winkel des Halbkreises zuneigt, zwischen den beiden Linien gelegt werden. Die eine Seite eines gegebenen Rhombus ist verlängert, es soll in dem entstandenen äusseren Winkel eine der Grösse nach gegebene Gerade, die dem gegenüberliegenden Winkel sich zuneigt, construirt werden. In einem der Lage nach gegebenen Kreise eine der Grösse nach gegebene Gerade so zu ziehen, dass sie sich einem gegebenen Punkte zuneigt. Von diesen Problemen wird in dem ersten Buche das, welches den einen Halbkreis und eine Gerade betrifft, in vier Fällen behandelt, das in Betreff des Kreises in zwei Fällen, und das, welches den Rhombus betrifft, in zwei Fällen; das zweite Buch enthält nur das Problem in Betreff zweier Halbkreise, da die Voraussetzung zehn Fälle darbietet, in welchen mehrere Unterabtheilungen wegen der gegebenen Grösse der Linie zu unterscheiden sind.

Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα[1]*, τοῦτ᾽ ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δείκνυται, χωρὶς τῶν Ἐρατοσθένους μεσοτήτων, ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἡ τάξις ἀπαιτεῖ θεωρίαν· στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα, οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ᾽ ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι, διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δείκνυται, ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. ἦν μὲν οὖν ἀναδιδομένων κωνικῶν στοιχείων πρότερον Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου πέντε τεύχη, ὡς ἂν ἤδη δυνατοῖς οὖσι τοῖς ταῦτα παραλαμβάνουσιν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα. ἔχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο, θεωρήματα μὲν ἤτοι διαγράμματα ρκε, λήμματα δὲ λη.*

Κωνικῶν η.

Τὰ Εὐκλείδου βιβλία τέσσαρα κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα τέσσαρα, παρέδωκεν ὀκτὼ κωνικῶν τεύχη. Ἀρισταῖος δὲ ὃς ἔγραψε καὶ μεχρὶ τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη πέντε συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει καὶ οἱ πρὸ Ἀπολλωνίου τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπεὶ δ᾽ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων[2]*) διαφόρως τεμνομένων αἱ τρεῖς γίνονται γραμμαί, διαπορήσας ὡς φαίνεται Ἀπολλώνιος, τί δή ποτε ἀποκληρώσαντες οἱ πρὸ αὐτοῦ, ἣν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι, ἣν δὲ ὀρθογωνίου εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ ἀμβλυγωνίου, ἣν δὲ ἀμβλυγωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου, μεταθεὶς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου ὑπερβολήν, ἑκάστην δ᾽ἀπό τινος ἰδίου συμβεβηκότος· χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον, ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τεταγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ἀμβλυγωνίου ὑπερ-*

[1]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben *ἐπιπέδῳ*.
[2]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben *κωνικῶν*.

Das Bisherige umfasst das, was von ebenen Problemen in den Schriften über den rückwärts aufgelösten Ort gefunden wird; sie werden auch der Ordnung nach vorher dargethan, abgesehen von den mittleren Proportionalen des Eratosthenes, die zuletzt folgen. Die Ordnung verlangt, dass auf die ebenen Oerter die Betrachtung der körperlichen folgt. Man nennt körperliche Probleme nicht die, welche über Figuren im Raum aufgestellt werden, sondern diejenigen, die nicht durch ebene Oerter behandelt werden können, vielmehr zu ihrer Lösung die drei Kegelschnitte verlangen. Daher war es nöthig, über diese zu schreiben. Zuerst hat nun Aristäus der Aeltere über die Elemente der Kegelschnitte fünf Bücher herausgegeben, die in sehr präciser Form abgefasst waren, gleichsam für diejenigen, die bereits dergleichen verstehen können. Die zwei Bücher über Neigungen enthalten hundert fünf und zwanzig Sätze und acht und zwanzig Lemmata.

Acht Bücher Kegelschnitte.

Euklid's vier Bücher Kegelschnitte hat Apollonius vervollständigt; er hat vier weitere hinzugefügt und so acht Bücher Kegelschnitte herausgegeben. Aristäus, der auch die bis jetzt einzig vorhandenen fünf Bücher körperlicher Oerter in Zusammenhang mit den Kegelschnitten verfasst hat, und alle andern Mathematiker vor Apollonius nannten die drei Kegelschnittslinien den Schnitt des spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels. Da nun in jedem dieser drei Kegel, wenn sie auf verschiedene Weise geschnitten werden, die drei Linien entstehen, so veränderte Apollonius, der keinen Grund absah, warum seine Vorgänger gerade diese Bestimmung getroffen hatten (indem nämlich die Linie, die sie den Schnitt des spitzwinkligen Kegels nannten, auch der des recht- und stumpfwinkligen, und der des rechtwinkligen auch der des spitz- und stumpfwinkligen, und des stumpfwinkligen auch der des spitz- und rechtwinkligen sein kann) die Namen und nannte den Schnitt des spitzwinkligen Kegels Ellipse, den des rechtwinkligen Parabel, den des stumpfwinkligen Hyperbel, je nachdem einem jeden eine bestimmte Eigenschaft zukommt; wird nämlich ein Rechteck an eine gewisse Gerade angelegt, so ist es in dem Schnitt des spitzwinkligen Kegels kleiner, in dem des stumpfwinkligen grösser als ein Quadrat, in dem des rechtwinkligen aber weder

βάλλον τετραγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προςνοήσας ὅτι κατά τινα μίαν πτῶσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸν κῶνον καὶ γεννῶντος τρεῖς γραμμὰς ἐν ἑκάστῳ τῶν κώνων ἄλλη καὶ ἄλλη [1]) τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὠνόμασαν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου· ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, ἀεὶ ἡ αὐτὴ, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκείνου τοῦ τμηθέντος κώνου τομήν. ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος, οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν ὀκτὼ βιβλία λέγει, κεφαλαιώδη θεὶς προδήλωσιν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταύτην· περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπιπλεῖον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξηταςμένα.[2]) παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων [3]) συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρεῖαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παντοῖα [4]) χρήσιμα τὰ πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμοὺς ὧν [5]) τὰ πλείονα καὶ καλὰ καὶ ξένα κατανοήσαντες εὕρομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι [6]) αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προειρημένων [7]) τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσιν, [8]) καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ κύκλου περιφερείᾳ κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει, καὶ ἀντι-

---

[1]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben ἄλλην καὶ ἄλλην.

[2]) In Apoll. con. ed. *Halley* steht ἐξειργασμένα.

[3]) καὶ τῶν ἀντικειμένων fehlt im Text des Apoll.

[4]) Im Text des Apoll. heisst es: καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα.

[5]) Im Text des Apoll. lautet diese Stelle: ὧν τὰ πλεῖστα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μη etc.

[6]) Der Text des Apoll. hat τὸ τυχὸν für τι.

[7]) Im Text des Apoll. heisst es hier: τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι.

[8]) Der Text hat: συμβάλλουσι.

kleiner noch grösser. Hierbei liess er aber unberücksichtigt, dass infolge einer gewissen Lage der den Kegel schneidenden und die drei Linien in einem jeden der Kegel erzeugenden Ebene bald diese, bald jene Linie entsteht, welche man nach der Eigenthümlichkeit des Kegels benannte; denn wenn die schneidende Ebene einer Seite des Kegels parallel gelegt wird, so entsteht nur eine der drei Linien und zwar immer dieselbe, welche Aristäus nach dem geschnittenen Kegel benannte. — Apollonius giebt nun über den Inhalt der von ihm verfassten acht Bücher Kegelschnitte folgende summarische Uebersicht in der Vorrede zum ersten Buche: Das erste Buch enthält die Entstehung der drei Schnitte und der sogenannten entgegengesetzten, so wie auch ihre hauptsächlichsten Eigenschaften, vollständiger und im Ganzen mehr durchforscht, als in andern Schriften gefunden wird. Das zweite Buch handelt über die Durchmesser und Axen der Schnitte und der entgegengesetzten, über die Asymptoten und über anderes, was eine allgemeine und nothwendige Verwendung für die Determinationen darbietet; was ich Durchmesser und Axen nenne, wirst du aus diesem Buche lernen. Das dritte Buch enthält vieles manniglach Nützliche, sowohl für die synthetische Behandlung, als für die Determinationen der körperlichen Oerter, von denen wir das Meiste als schön und neu erkannt und gefunden haben, dass von Euklid der Ort zu drei und vier Linien nicht bestimmt worden ist, sondern nur ein kleiner Theil davon, und zwar auch nicht sehr glücklich, denn es war nicht möglich, die Synthese ohne das oben Erwähnte zu vollenden. Das vierte Buch enthält, auf wie vielerlei Art die Kegelschnitte einander und die Peripherie des Kreises schneiden können, und ausserdem anderes, wovon unsere Vorgänger gar nichts geschrieben haben, in wie viel Punkten nämlich ein Kegelschnitt mit der Peripherie eines Kreises zusammentrifft und in wie viel Punkten entgegengesetzte mit entgegengeset ten zusammenfallen. Die vier folgenden Bücher enthalten mehr das, was über das Gewöhnliche

κείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσιν. [1]) τὰ δὲ λοιπὰ τέσσαρα περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλεῖον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν, τὸ δὲ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων. Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς μὴ τελειῶσθαι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἠδυνήθη οὐδ' ἄλλος οὐδείς, ἀλλ' οὐδὲ μικρόν τι προςθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι, διά γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην, ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς, καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν, ἐπιεικέστατος ὢν καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν, οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος, ὅσον δύνατον ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν. οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον, τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν, νῦν δ' οὐδαμῶς, ἐπείτοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται. προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται, προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου, καὶ σχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὅθεν ἔσχε καὶ τὴν τοσαύτην ἕξιν, οὐκ ἂν πάθῃ. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπος, ἐφ' ᾧ μέγα φρονεῖ προσθεὶς χάριν ὀφείλων εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστιν· ἐὰν γὰρ θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό τινος τοῦ αὐτοῦ σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστι μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν· καὶ ἐὰν ἐπὶ τέσσαρας εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις

---

[1]) Im Text des Apoll. lautet diese Stelle: κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι.

hinausgeht: Das erste handelt grösstentheils über Minima und Maxima, das zweite über die gleichen und ähnlichen Schnitte, das dritte über die zu Determinationen dienlichen Theoreme, das vierte enthält bestimmte, die Kegelschnitte betreffende Aufgaben. So weit Apollonius. Wenn, wie er im dritten Buche sagt, von Euklid die Bestimmung des Ortes zu drei und vier Linien nicht vollkommen geleistet werde, so vermochte weder er noch ein anderer die Sache nicht einmal um eine Kleinigkeit weiter zu bringen, als es von Euklid geschehen war, wenigstens nur mit Hülfe dessen, was bis zu den Zeiten Euklid's über die Kegelschnitte dargethan war, wie er auch selbst durch seine eigenen Worte bestätigt, dass nämlich die vollkommene Bestimmung unmöglich sei ohne das, was er vorher zu erfinden genöthigt gewesen wäre. Euklid rühmte dem Aristäus nach, dass er sich durch die Herausgabe der Kegelschnitte verdient gemacht habe, und hatte nicht die Absicht, andern zuvorzukommen oder in ihr Werk sich einzumischen, denn er war sehr bescheiden und gegen alle gefällig (wie es sein muss) welche irgend wie zur Vermehrung der Wissenschaft beitragen konnten, und keineswegs mit andern Händel anfangend, vielmehr gewissenhaft und nicht wie jener prahlerisch; er handelte daher so weit es möglich war, über den Ort mit Hülfe der von jenem verlassten Kegelschnitte, ohne zu rühmen, dass das Geleistete vollendet sei, denn alsdann hätte man ein Recht gehabt, ihn einer Prüfung zu unterwerfen, jetzt aber keineswegs, zumal auch der in Rede stehende, der das Meiste in den Kegelschnitten unvollendet gelassen hat, nicht angegriffen wird. Er konnte das, was dem Orte fehlte, hinzufügen, da er von dem, was Euklid über den Ort bereits geschrieben, eine Vorstellung besass, und obwohl er mit den Schülern Euklid's in Alexandrien lange Zeit verkehrte, woher er auch eine so grosse Geschicklichkeit erlangte, sollte es ihm doch nicht gelingen. Dieser Ort nun an drei und vier Linien, zu dem etwas hinzugefügt zu haben er sich brüstet, obwohl er dem, der zuerst darüber geschrieben hat, Dank schuldig ist, lautet so: Wenn an drei der Lage nach gegebene Gerade von einem und demselben Punkte unter gegebenen Winkeln Gerade gezogen werden und das Verhältniss des Rechtecks aus zwei der gezogenen zu dem Quadrat der übrigen gegeben ist, so berührt der Punkt einen der Lage nach gegebenen körperlichen Ort, d. h. er liegt auf einer der drei Kegelschnittslinien; und wenn die Linien zu vier der Lage

καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅπτεσθαι θέσει δεδομένης κώνου τομῆς. ἐὰν μὲν γὰρ ἐπὶ δύο μόνας, ἐπίπεδος ὁ τόπος δέδεικται· ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τεσσάρων, ἅψεται τὸ σημεῖον τόπων οὐκέτι γνωρίμων, ἀλλὰ γραμμῶν μόνον λεγομένων, ποδαπῶν δὲ ἤ τινα ἐχουσῶν ἴδια οὐκέτι, ὧν μίαν οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν. αἱ δὲ προτάσεις αὐτῶν εἰσίν· ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας πέντε καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις καὶ λόγος ᾖ δεδομένος τοῦ ὑπὸ τριῶν κατηγμένων περιεχομένου στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων καὶ δοθείσης τινὸς περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης γραμμῆς· ἐάν τε ἐπὶ ἓξ καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν περιεχομένου καὶ εἰρημένου στερεοῦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν τριῶν, πάλιν τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης. ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τῶν ἕξ, οὐκέτι μὲν ἔχουσι λέγειν, λόγον ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τεσσάρων περιεχομένου τινὸς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν, ἐπεὶ οὐκ ἔστι τὶ περιεχόμενον ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν διαστάσεων. συγκεχωρήκασι δὲ ἑαυτοῖς οἱ βραχὺ πρὸ ἡμῶν ἑρμηνεύειν τὰ τοιαῦτα, μὴ δὲ ἓν μηδαμῶς διαληπτὸν σημαίνοντες, τὸ ὑπὸ τῶνδε περιεχόμενον λέγοντες ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆσδε τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶνδε. παρῆν δὲ διὰ τῶν συνημμένων λόγων ταῦτα καὶ λέγειν καὶ δεικνύναι καθόλου καὶ ἐπὶ τῶν προειρημένων προτάσεων καὶ ἐπὶ τούτων τὸν τρόπον τοῦτον· ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις καὶ δεδομένος ᾖ ὁ λόγος ὁ συνημμένος ἐξ οὗ ἔχει μία κατηγμένη πρὸς μίαν, καὶ ἑτέρα πρὸς ἑτέραν, καὶ ἄλλη πρὸς ἄλλην, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς δοθεῖσαν, ἐὰν ὦσιν ἑπτά, ἐὰν δὲ ὀκτώ, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς λοιπήν, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης γραμμῆς· καὶ ὁμοίως ὅσαι ἂν ὦσιν περισσαὶ ἢ ἄρτιαι τὸ πλῆθος. τούτων ὡς ἔφην ἑπομένων τῷ ἐπὶ τέσσαρας τόπῳ οὐδὲ ἓν οὖν τεθείκασιν ὥστε τὴν γραμμὴν εἰδέναι. τοῦθ' οἱ βλέποντες ἥκιστα ἐπαίρονται, καθάπερ οἱ πάλαι καὶ τῶν τὰ κρείττονα γραψάντων ἕκαστος· [1] *ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς ἀρχαῖς ἐπὶ*

[1]) So *Halley*; die Hdsch. haben *ἕκαστον* und *ἕκαστα*.

nach gegebenen Geraden unter gegebenen Winkeln gezogen werden und das Verhältniss des Rechtecks aus zweien zu dem Rechteck aus den beiden andern gegeben ist, so liegt der Punkt ebenfalls auf einem der Lage nach gegebenen Kegelschnitt. Es ist bereits bewiesen, dass der Ort ein ebener ist, wenn die Linien nur an zwei gezogen werden. Werden sie aber an mehr als vier gezogen, so wird der Punkt auf noch nicht bekannten Oertern, sondern auf nur angenommenen Linien liegen, von denen man nicht weiss, von welcher Art sie sind oder welche Eigenthümlichkeiten sie haben; von diesen hat man eine einzige, aber nicht die erste und die am deutlichsten erscheint, synthetisch erforscht, indem man zeigte, dass sie nützlich sei. Die Aufgaben sind die folgenden: Wenn von einem Punkt nach fünf der Lage nach gegebenen Geraden unter gegebenen Winkeln Gerade gezogen werden und das Verhältniss des von drei Linien gebildeten rechtwinkligen Parallelepipedums zu dem aus den beiden übrigen und einer gegebenen Linie gebildeten gegeben ist, so wird der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Linie liegen; und wenn sie zu sechs Linien gezogen werden und das Verhältniss des genannten aus drei Linien gebildeten Körpers zu dem aus den drei andern gebildeten gegeben ist, so wird der Punkt wiederum auf einer der Lage nach gegebenen Linie liegen. Wenn aber mehr als sechs gegeben sind, so kann man nicht mehr sagen, das Verhältniss eines Körpers aus vier Linien zu dem aus den übrigen gebildeten sei gegeben, da ein Körper aus mehr als drei Dimensionen unmöglich ist. Unsere unmittelbaren Vorgänger haben sich gestattet, dieses zu deuten, ohne jedoch irgend etwas annehmbares vorzubringen, indem sie den aus solchen gebildeten Körper zu dem über einer solchen construirten Quadrat oder zu dem aus solchen construirten Rechteck nannten. Man konnte dieses aber mit Hülfe zusammengesetzter Verhältnisse sowohl sagen, als im Allgemeinen beweisen in Betreff der oben erwähnten, so wie auch in Betreff dieser Aufgaben auf folgende Weise: Wenn von einem Punkte zu der Lage nach gegebenen Geraden unter gegebenen Winkeln Linien gezogen werden und das zusammengesetzte Verhältniss der einen gezogenen Linie zu der einen, einer zweiten zu einer zweiten, u. s. w., der letzten zu der gegebenen gegeben ist, falls es sieben, sind es aber acht, der letzten zu der letzten gegeben ist, so wird der Punkt auf einer der Lage nach gegebenen Linie liegen; und auf ähnliche Weise, mögen die Linien in ungerader oder gerader Anzahl vorhanden sein. Zu diesem, woraus wie ich sagte, der Ort zu vier Linien folgt, haben sie auch nicht das Geringste beigebracht, um die Linie zu erkennen. Die aber die Schwierigkeit erkannten, griffen die Sache am wenigsten an, wie die Alten es thaten und ein jeder der besseren Schriftsteller; ich jedoch, der ich alle in den Anfängen der mathematischen Wissenschaften und in physischen Untersuchungen beschäf-

τῶν μαθημάτων καὶ τῆς ὑπὸ φύσεως προκειμένης ζητημάτων ὕλης κινουμένους ὁρῶν ἅπαντας, αἰδούμενος ἐγὼ καὶ δείξας γε πολλιῶν[1]*) κρείσσονα καὶ πυλλὴν προφερόμενα ὠφέλειαν. ἵνα δὲ μὴ κεναῖς χερσὶ τοῦτο φθεγξάμενος ὧδε χωρισθῶ τοῦ λόγου, ταῦτα δώσω τοῖς ἀναγνοῦσιν· ὁ μὲν τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν*[2]*) λόγος συνῆπται ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὁμοίως κατηγμένων εὐθειῶν ἀπὸ τῶν ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικῶν σημείων· ὁ δὲ τῶν ἀτελῶν ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν περιφερειῶν, ὅσας*[3]*) ἐποίησε τὰ ἐν τούτοις κεντροβαρικὰ σημεῖα. ὁ δὲ τούτων τῶν περιφερειῶν δῆλον ὡς ἔκ τε τῶν κατηγμένων καὶ ὧν περιέχουσιν αἱ τούτων ἄκραι, εἰ καὶ εἶεν πρὸς τοῖς ἄξοσιν ἀμφοιστικῶν, γωνιῶν. περιέχουσι δὲ αὗται αἱ προτάσεις, σχεδὸν οὖσαι μία, πλεῖστα ὅσα καὶ παντοῖα θεωρήματα γραμμῶν τε καὶ ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, πάνθ᾽ ἅμα καὶ μιᾷ δείξει καὶ τὰ μήπω δεδειγμένα καὶ τὰ ἤδη ὡς*[4]*) καὶ τὰ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶνδε τῶν στοιχείων. ἔχει δὲ τὰ ὀκτὼ βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα $\overline{υπζ}$, λήμματα δὲ ἤτοι λαμβανόμενά ἐστιν εἰς αὐτὰ ἑβδομήκοντα.*

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ γ πρὸς δ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ εἰς τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγον. ἔκλινα πρὸς τὴν αβ εὐθεῖαν ἐν γωνίᾳ τυχούσῃ εὐθεῖαν τὴν αη, καὶ τῇ μὲν γ ἴσην ἀφεῖλον τὴν αζ, τῇ δὲ δ τὴν ζη, καὶ ἐπιζεύξας τὴν βη ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ζθ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αθ πρὸς θβ οὕτως ἡ αζ πρὸς ζη, ἴση δέ ἐστιν ἡ μὲν αζ τῇ γ, ἡ δὲ ζη τῇ δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ

---

[1]) So die Hdsch ; *Halley* emendirt πολλῷ.

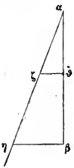
[2]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben ἀμφοῖν στίχων.

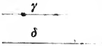
[3]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben ὅσα.

[4]) So *Halley*; die Hdsch. haben ἡδέως.

tigt sah, erröthete und zeigte wenigstens um vieles besseres und nützlicheres. Damit ich nun nicht mit leeren Händen dies verkündige und mich so der Rechenschaft entziehe, will ich denen, die es erkennen, folgendes mittheilen: Figuren, die durch eine vollständige Rotation entstanden sind, stehen in einem Verhältniss, welches aus dem das die rotirenden bilden, und aus dem der Geraden, die aus den Schwerpunkten der rotirenden auf die Rotationsaxen auf ähnliche Weise gezogen sind, zusammengesetzt ist; diejenigen Figuren aber, die durch eine unvollständige Rotation entstanden sind, stehen in einem Verhältniss, welches aus dem, das die rotirenden bilden, und aus dem der Kreisbogen, die die Schwerpunkte der rotirenden beschreiben, zusammengesetzt ist. Das Verhältniss dieser Kreisbogen ist aber offenbar zusammengesetzt aus dem, in welchem die nach den Rotationsaxen gezogenen Linien stehen, und aus dem der Winkel die durch die äussersten dieser gezogenen Linien, wenn diese bis zu den Axen der durch Rotation entstandenen Figuren gehen, gebildet werden. Diese Sätze, die nahezu in einen einzigen zusammenfallen, umfassen sehr viele Theoreme in Bezug auf Linien, Flächen und Körper, wie verschiedenartig sie auch sein mögen; auch werden sie alle, sowohl die noch nicht bewiesenen, als die bereits dargelegten, wie zum Beispiel die im zwölften Buch der Elemente, auf ein und dieselbe Weise bewiesen. Die acht Bücher der Apollonischen Kegelschnitte enthalten vierhundert sieben und achtzig Lehrsätze und siebzig Lemmata.

Eine gegebene Gerade nach einem gegebenen [*Command. I.*] Verhältniss zu theilen.





Es sei $\alpha\beta$ die gegebene Gerade, $\gamma:\delta$ das gegebene Verhältniss; es soll $\alpha\beta$ nach dem Verhältniss $\gamma:\delta$ getheilt werden. Man lege an $\alpha\beta$ unter einem beliebigen Winkel die Gerade $\alpha\eta$ an, mache $\alpha\zeta = \gamma$, $\zeta\eta = \delta$, ziehe $\beta\eta$ und $\zeta\vartheta \parallel \beta\eta$. Da nun $\alpha\vartheta : \vartheta\beta = \alpha\zeta : \zeta\eta$, und $\alpha\zeta = \gamma$, $\zeta\eta = \delta$, so ist auch $\alpha\vartheta : \vartheta\beta = \gamma : \delta$. Die Gerade $\alpha\beta$ ist demnach in dem Punkt ϑ getheilt.

αθ πρὸς θβ οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ. διῄρηται ἄρα κατὰ τὸ θ σημεῖον, ὅπερ: —

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, δ, εὑρεῖν ὡς τὴν αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἄλλην τινὰ πρὸς τὴν δ. Πάλιν ἔκλινά τινα εὐθεῖαν τὴν γη ἐν τυχούσῃ γωνίᾳ, καὶ τῇ δ ἴσην ἀπεθέμην τὴν γζ· ἐπέζευξα τὴν βζ καὶ ταύτῃ [1]) παράλληλον ἤγαγον τὴν αη. γίνεται οὖν πάλιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ ηζ πρὸς τὴν γζ, τουτέστι πρὸς τὴν δ· εὕρηται ἄρα ἡ ζη. ὁμοίως κἂν ἡ τρίτη δοθῇ, τὴν τετάρτην εὑρήσομεν.

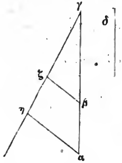
Ἐχέτω τὸ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ, ὅτι καὶ κατὰ σύνθεσιν τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτως ἄλλό τι τὸ η πρὸς τὸ εζ, καὶ τὸ η ἄρα πρὸς τὸ εζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ η τοῦ δε. κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ θε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτω τὸ θε πρὸς τὸ εζ, συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αγ πρὸς τὸ βγ οὕτω τὸ ζθ πρὸς τὸ ζε, τὸ δὲ θζ πρὸς τὸ ζε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε· καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε.

Πάλιν δὴ τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ· ὅτι καὶ τὸ αγ πρὸς τὸ γβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ εζ. Πάλιν γὰρ ἐπεὶ τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ εζ, ἔσται ἔλλασον τοῦ δε. ἔστω τὸ εθ· γίνεται ἄρα καὶ ὡς τὸ αγ πρὸς τὸ γβ οὕτω τὸ ζθ πρὸς τὸ ζε. τὸ δὲ θζ πρὸς τὸ ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε· τὸ αγ ἄρα πρὸς τὸ γβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε.

---

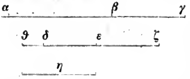
[1]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben ἢ καὶ αὐτῇ.

Zu drei gegebenen Geraden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, δ soll [*Command. II.*] eine Gerade gefunden werden, so dass sich $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ verhält wie die gefundene Gerade zu δ.



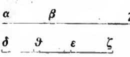
Man lege wiederum die Gerade $\gamma\eta$ unter einem beliebigen Winkel an, mache $\gamma\zeta = \delta$, ziehe $\beta\zeta$ und $\alpha\eta \parallel \beta\zeta$. Nun ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \eta\zeta : \gamma\zeta$ d. h. $= \eta\zeta : \delta$; es ist also $\zeta\eta$ die gesuchte Linie. Auf ähnliche Weise wird, falls die dritte Proportionale gegeben ist, die vierte gefunden.

Wenn $\alpha\beta : \beta\gamma > \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist auch durch [*Command. III.*] Zusammenfassung $\alpha\gamma : \gamma\beta > \delta\zeta : \zeta\varepsilon$.



Es sei $\alpha\beta : \beta\gamma$ wie irgend eine andere $\eta : \varepsilon\zeta$, so ist auch $\eta : \varepsilon\zeta > \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, mithin $\eta > \delta\varepsilon$. Es sei $\eta = \vartheta\varepsilon$. Da nun $\alpha\beta : \beta\gamma = \vartheta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist $\alpha\gamma : \beta\gamma = \zeta\vartheta : \zeta\varepsilon$, aber $\zeta\vartheta : \zeta\varepsilon > \delta\zeta : \zeta\varepsilon$, folglich auch $\alpha\gamma : \gamma\beta > \delta\zeta : \zeta\varepsilon$.

Ist wiederum $\alpha\beta : \beta\gamma < \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist auch [*Command. IV.*] $\alpha\gamma : \gamma\beta < \delta\zeta : \varepsilon\zeta$.



Da $\alpha\beta : \beta\gamma < \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so wird, wenn man $\alpha\beta : \beta\gamma$ wie irgend eine andere Linie zu $\varepsilon\zeta$ setzt, diese andere Linie $< \delta\varepsilon$ sein. Dieselbe sei $= \varepsilon\vartheta$. Demnach ist $\alpha\gamma : \gamma\beta = \vartheta\zeta : \zeta\varepsilon$; aber $\vartheta\zeta : \zeta\varepsilon < \delta\zeta : \zeta\varepsilon$, folglich $\alpha\gamma : \gamma\beta < \delta\zeta : \zeta\varepsilon$.

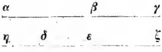
Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ· ὅτι καὶ ἐναλλὰξ τὸ αβ πρὸς τὸ δε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ βγ πρὸς τὸ εζ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ εζ· φανερὸν δὴ ὅτι μεῖζον ἔσται τοῦ δε. ἔστω τὸ ηε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ εη οὕτω τὸ βγ πρὸς τὸ εζ. ἀλλὰ τὸ αβ πρὸς τὸ δε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αβ πρὸς τὸ εη, τουτέστιν ἤπερ τὸ βγ πρὸς εζ· καὶ τὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ δε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ βγ πρὸς τὸ εζ. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ὅτι καὶ ἐναλλάξ. ἔσται γὰρ καὶ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ εζ· ὅτι πρὸς ἐλάσσονα τοῦ δε. [1]) τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά.

Τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε· ὅτι ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς τὸ αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζδ πρὸς τὸ δε. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ αγ πρὸς τὸ γβ οὕτω τὸ δζ πρὸς ἄλλό τι. ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ζε. ἔστω πρὸς τὸ ζη· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αγ πρὸς τὸ αβ οὕτω τὸ ζδ πρὸς τὸ δη. τὸ δὲ ζδ πρὸς τὸ δη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζδ πρὸς τὸ δε. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ αγ πρὸς τὸ γβ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε· ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς τὸ αβ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ δε. ἔσται γὰρ ὡς τὸ αγ πρὸς τὸ γβ οὕτω τὸ δζ πρὸς μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ζε. καὶ τὰ λοιπὰ φανερά.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ· ὅτι ἀνάπαλιν τὸ γβ πρὸς τὸ βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς τὸ εδ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ οὕτω τὸ δε πρός τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ εζ, ὥστε πρὸς τὸ εη. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα οὕτω τὸ εη πρὸς τὸ εδ. τὸ δὲ ηε πρὸς τὸ εδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς τὸ εδ. ὁμοίως δὴ κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ εδ πρὸς τὸ εζ, ἀνάπαλιν τὸ γβ πρὸς τὸ βα· μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς τὸ εδ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γβ οὕτω τὸ δε πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζ· τὰ δὲ λοιπὰ φανερά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτων ὅτι ἐὰν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ, καὶ τὸ ζε πρὸς τὸ εδ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ

[1]) Vielleicht ist zu lesen: φανερὸν δὴ ὅτι ἔλασσον τοῦ δε.

Ist ferner $\alpha\beta : \beta\gamma > \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist auch $\alpha\beta : \delta\varepsilon > \beta\gamma : \varepsilon\zeta$. [*Command. V.*]



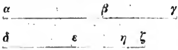
Man mache $\alpha\beta : \beta\gamma$ wie irgend eine andere Linie zu $\varepsilon\zeta$, so ist offenbar diese andere Linie $> \delta\varepsilon$. Sie sei $= \eta\varepsilon$. Demnach ist durch Umstellung $\alpha\beta : \eta\varepsilon = \beta\gamma : \varepsilon\zeta$; aber $\alpha\beta : \delta\varepsilon > \alpha\beta : \eta\varepsilon$, mithin $\alpha\beta : \delta\varepsilon > \beta\gamma : \varepsilon\zeta$. — Ist $\alpha\beta : \beta\gamma < \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist auch $\alpha\beta : \delta\varepsilon < \beta\gamma : \varepsilon\zeta$; denn ist $\alpha\beta : \beta\gamma$ wie irgend eine andere Linie zu $\varepsilon\zeta$, so wird diese andere Linie $< \delta\varepsilon$ sein. Das Weitere wie vorher.

Wenn $\alpha\gamma : \gamma\beta > \delta\zeta : \zeta\varepsilon$, so ist $\gamma\alpha : \alpha\beta < \zeta\delta : \delta\varepsilon$. [*Command. VI.*]



Man mache $\alpha\gamma : \gamma\beta$ wie $\delta\zeta$ zu irgend einer andern Linie, so wird diese $< \zeta\varepsilon$. Sie sei $= \zeta\eta$. Demnach ist $\alpha\gamma : \alpha\beta = \delta\zeta : \delta\eta$; aber $\zeta\delta : \delta\eta < \zeta\delta : \delta\varepsilon$. — Auf ähnliche Weise, wenn $\alpha\gamma : \gamma\beta < \delta\zeta : \zeta\varepsilon$, ist $\gamma\alpha : \alpha\beta > \delta\zeta : \delta\varepsilon$. Es ist nämlich $\alpha\gamma : \gamma\beta$ wie $\delta\zeta$ zu irgend einer andern Linie, die grösser ist als $\zeta\varepsilon$. Das Weitere ist deutlich.

Wenn wiederum $\alpha\beta : \beta\gamma > \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, so ist $\gamma\beta : \beta\alpha < \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$. [*Command. VII.*]



Man mache $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon$ zu irgend einer andern Linie. Diese wird kleiner sein als $\varepsilon\zeta$; sie sei $= \varepsilon\eta$. Demnach ist $\gamma\beta : \beta\alpha = \varepsilon\eta : \varepsilon\delta$; aber $\eta\varepsilon : \varepsilon\delta < \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$. — Auf ähnliche Weise ist, wenn $\alpha\beta : \beta\gamma < \varepsilon\delta : \varepsilon\zeta$, auch $\gamma\beta : \beta\alpha > \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$. Es ist nämlich $\alpha\beta : \beta\eta = \delta\varepsilon$ zu irgend einer grössern Linie als $\varepsilon\zeta$. Das Weitere ist deutlich. — Hieraus ergiebt sich, dass wenn $\alpha\beta : \beta\gamma > \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, auch $\zeta\varepsilon : \varepsilon\delta > \gamma\beta : \beta\alpha$, und wenn $\alpha\beta : \beta\gamma < \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, auch $\zeta\varepsilon : \varepsilon\delta < \gamma\beta : \beta\alpha$ ist.

τὸ γβ πρὸς τὸ βα· ἐὰν δὲ τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ, καὶ τὸ ζε πρὸς τὸ εδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ γβ πρὸς τὸ βα.

Ἐχέτω τὸ αβ πρὸς τὸ δε μείζονα λόγον ἤπερ τὸ βγ πρὸς εζ· ὅτι καὶ τὸ αβ πρὸς τὸ δε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αγ πρὸς τὸ δζ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ δε οὕτω τὸ βγ πρός τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ εζ. ἔστω πρὸς τὸ ηε· καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ πρὸς ὅλην τὴν δη ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν δε· ἡ δὲ αγ πρὸς τὴν δη μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δζ· καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς τὴν δε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αγ πρὸς τὴν δζ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅλη ἡ αγ πρὸς ὅλην τὴν δζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αβ πρὸς τὸ δε. κἂν ἔλασσον τὸ μέρος μεῖζον ὅλης.[1])

Ἐχέτω δὴ πάλιν ὅλη ἡ αγ πρὸς ὅλην τὴν δζ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ αβ πρὸς τὴν δε· ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ βγ πρὸς λοιπὴν τὴν εζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αγ πρὸς τὴν δζ. [Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν δζ][2]) οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν δη· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ βγ πρὸς λοιπὴν τὴν ηζ ἐστὶν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν δζ. ἡ δὲ βγ πρὸς τὴν εζ [μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ζη]·[3]) καὶ ἡ βγ ἄρα πρὸς τὴν εζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αγ πρὸς τὴν δζ. ἐὰν δὲ ὅλη πρὸς τὴν ὅλην ἐλάσσων, ἡ λοιπὴ ἐλάσσων.[4])

Ἔστω μεῖζον μὲν τὸ αβ τοῦ γ, ἴσον δὲ τὸ δ τῷ ε· ὅτι τὸ αβ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δ πρὸς τὸ ε. Κείσθω γὰρ τῷ γ ἴσον τὸ βζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ βζ πρὸς τὸ γ οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ε. ἀλλὰ τὸ αβ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ βζ πρὸς τὸ γ· καὶ τὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δ πρὸς τὸ ε. καὶ φανερὸν ὅτι ἂν ἔλασσον τὸ αβ τοῦ γ, τὸ αβ πρὸς τὸ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δ πρὸς τὸ ε, διὰ τὸ ἀνάπαλιν.

Ἀλλὰ ἔστω μεῖζον μὲν τὸ αβ τοῦ γ, ἔλασσον δὲ τὸ δε τοῦ ζ· ὅτι τὸ αβ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ ζ. Φανερὸν μὲν οὖν καὶ ἄνευ[5]) ἀποδείξεως. εἰ γὰρ

---

[1]) So die Hdsch.; *Commandin* emendirt: κἂν ἐλάσσων τοῦ μέρους, μείζων ὅλης.

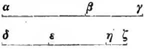
[2]) Einschaltung von *Commandin*.

[3]) Einschaltung von *Commandin*.

[4]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben μείζων.

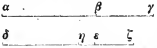
[5]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben διά.

Ist $\alpha\beta : \delta\varepsilon > \beta\gamma : \varepsilon\zeta$, so ist auch $\alpha\beta : \delta\varepsilon$ [*Command. VIII.*] $> \alpha\gamma : \delta\zeta$.



Macht man nämlich $\alpha\beta : \delta\varepsilon = \beta\gamma$ zu irgend einer Linie, so wird diese kleiner sein als $\varepsilon\zeta$. Sie sei $= \eta\varepsilon$. Demnach ist $\alpha\gamma : \delta\eta = \alpha\beta : \delta\varepsilon$, aber $\alpha\gamma : \delta\eta > \alpha\gamma : \delta\zeta$, mithin ist auch $\alpha\beta : \delta\varepsilon > \alpha\gamma : \delta\zeta$. — Offenbar ist $\alpha\gamma : \delta\zeta < \alpha\beta : \delta\varepsilon$. — Und wenn das Verhältniss des Theiles kleiner ist, so ist das Verhältniss der ganzen Linie grösser.[1])

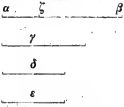
Ist wiederum $\alpha\gamma : \delta\zeta > \alpha\beta : \delta\varepsilon$, so ist auch [*Command. IX.*] $\beta\gamma : \varepsilon\zeta > \alpha\gamma : \delta\zeta$.



Man mache $\alpha\gamma : \delta\zeta = \alpha\beta : \delta\eta$;
alsdann ist $\beta\gamma : \eta\zeta = \alpha\gamma : \delta\zeta$.
Aber $\beta\gamma : \varepsilon\zeta > \beta\gamma : \eta\zeta$,
folglich $\beta\gamma : \varepsilon\zeta > \alpha\gamma : \delta\zeta$.

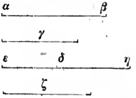
Ist das Verhältniss der ganzen Linie zur ganzen Linie kleiner, so ist auch das des Restes zum Reste kleiner.

Es sei $\alpha\beta > \gamma$, $\delta = \varepsilon$, so ist $\alpha\beta : \gamma > \delta : \varepsilon$. [*Command. X.*]



Ist nämlich $\beta\zeta = \gamma$, so ist $\beta\zeta : \gamma = \delta : \varepsilon$;
aber $\alpha\beta : \gamma > \beta\zeta : \gamma$,
mithin $\alpha\beta : \gamma > \delta : \varepsilon$.
Offenbar ist, wenn $\alpha\beta < \gamma$, $\alpha\beta : \gamma < \delta : \varepsilon$.

Wenn aber $\alpha\beta > \gamma$, $\delta\varepsilon < \zeta$, so ist $\alpha\beta : \gamma$ [*Command. XI.*] $> \delta\varepsilon : \zeta$.



Dies ist deutlich ohne Beweis, denn wenn unter der Voraussetzung,

[1]) d. h. wenn $\alpha\beta : \delta\varepsilon < \beta\gamma : \varepsilon\zeta$, so ist $\alpha\gamma : \delta\zeta > \alpha\beta : \delta\varepsilon$.

ὄντος ἴσου τοῦ δε τῷ ζ τὸ αβ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ ζ, ἐλάσσονος ὄντος πολλῷ μείζονα λόγον ἕξει. διὰ ἀποδείξεως δὲ οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ζ, ἔσται μεῖζον τοῦ ζ, ὥστε καὶ τοῦ δε. ἔστω οὖν αὐτῷ ἴσον τὸ ηε· τὸ ηε ἄρα πρὸς τὸ ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ηε πρὸς τὸ ζ οὕτω τὸ αβ πρὸς τὸ γ· καὶ τὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ ζ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅπου τὸ ἔλασσον, ἀεὶ ἐλάσσονα. καὶ ὅτι μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ζ τοῦ ὑπὸ τῶν γ,δε· ἴσον γὰρ αὐτῷ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γ,εη, ὅ ἐστι μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν γ,δε.

Εὐθεῖα ἡ αβ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ· ὅτι πάντα μὲν τὰ μεταξὺ τῶν α, γ σημείων εἰς ἐλάσσονας λόγους διαιρεῖ τὴν αβ τοῦ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ, πάντα δὲ τὰ μεταξὺ τῶν γ, β εἰς μείζονας. Εἰλήφθω γὰρ σημεῖα ἐφ' ἑκατέρα τοῦ γ τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων μὲν ἡ δα τῆς αγ, μείζων δὲ ἡ δβ τῆς βγ, ἡ δα πρὸς τὴν αγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ δβ πρὸς τὴν βγ· ἐναλλὰξ ἡ αδ πρὸς τὴν δβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν α, γ σημείων. πάλιν ἐπεὶ μείζων μέν ἐστιν ἡ εα τῆς αγ, ἐλάσσων δὲ ἡ εβ τῆς βγ, ἡ εα ἄρα πρὸς τὴν αγ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ· ἐναλλὰξ ἄρα ἡ αε πρὸς τὴν εβ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μεταξὺ καὶ τῶν γ, β λαμβανομένων σημείων.

Ἐὰν εὐθεῖα ἡ αβ καὶ τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ γ, πάντων τῶν λαμβανομένων σημείων μέγιστον ἀποτέμνει τὸ ὑπὸ τῶν αγβ τὸ γ σημεῖον. Ἐὰν γὰρ ληφθῇ σημεῖον τὸ δ, γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν αδβ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ ἴσον τῷ ἀπὸ αγ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν αγβ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αδβ. τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα. λέγω δ' ὅτι καὶ αἰεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ γ τοῦ ἀπωτέρου μεῖζον χωρίον ποιεῖ. εἰλήφθω γὰρ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ε μεταξὺ τῶν α, δ· δεικτέον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αδβ τοῦ ὑπὸ τῶν αεβ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αδβ

dass $\delta\varepsilon = \zeta$, $\alpha\beta : \gamma > \delta\varepsilon : \zeta$, so wird, wenn $\delta\varepsilon < \zeta$, $\alpha\beta : \gamma$ noch um vieles grösser sein. Bewiesen wird es auf folgende Weise: Da $\alpha\beta > \gamma$, so wird, wenn man setzt $\alpha\beta : \gamma$ wie irgend eine andere Linie zu ζ, diese andere Linie grösser als ζ sein, daher auch $> \delta\varepsilon$. Dieselbe sei $= \eta\varepsilon$. Alsdann ist

$$\eta\varepsilon : \zeta > \delta\varepsilon : \zeta,$$

aber $\eta\varepsilon : \zeta = \alpha\beta : \gamma,$

mithin $\alpha\beta : \gamma > \delta\varepsilon : \zeta.$

Offenbar ist auch, wenn $\alpha\beta < \gamma$, das Verhältniss ein kleineres. Ferner ist Rechteck $\alpha\beta . \zeta >$ Rechteck $\gamma . \delta\varepsilon$, denn es ist Rechteck $\alpha\beta . \zeta =$ Rechteck $\gamma . \varepsilon\eta$, dieses aber ist grösser als Rechteck $\gamma . \delta\varepsilon$.

Es sei die Gerade $\alpha\beta$ im Punkte γ getheilt, so werden alle Punkte zwischen α und γ die Gerade $\alpha\beta$ in kleinere Verhältnisse, alle Punkte aber zwischen γ und β in grössere Verhältnisse als $\alpha\gamma : \gamma\beta$ theilen. [*Command. XII*]

α —— δ — γ — ε — β

Man nehme auf beiden Seiten des Punktes γ die Punkte δ, ε an. Da nun $\delta\alpha < \alpha\gamma$, $\delta\beta > \beta\gamma$, so ist $\delta\alpha : \alpha\gamma < \delta\beta : \beta\gamma$, mithin $\delta\alpha : \delta\beta < \alpha\gamma : \beta\gamma$. Auf ähnliche Weise lässt es sich von allen zwischen α und γ liegenden Punkten beweisen. Da ferner $\varepsilon\alpha > \alpha\gamma$, $\varepsilon\beta < \beta\gamma$, so ist auch $\varepsilon\alpha : \alpha\gamma > \varepsilon\beta : \beta\gamma$, mithin $\varepsilon\alpha : \varepsilon\beta > \alpha\gamma : \gamma\beta$. Auf gleiche Weise wird es in Bezug auf andere zwischen γ und β angenommene Punkte bewiesen.

Wenn die Gerade $\alpha\beta$ im Punkte γ halbirt wird, so theilt unter allen andern angenommenen Punkten der Punkt γ die Linie so, dass das Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$ ein Maximum ist. [*Command. XIII*]

α —— ε δ —— γ —— β

Nimmt man einen Punkt δ an, so ist Reckteck $\alpha\delta . \delta\beta$ + Quadrat über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$, mithin Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta >$ Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$. Dasselbe gilt von allen übrigen Punkten. — Auch schneidet der dem Punkte γ nähere Punkt ein grösseres Rechteck ab, als der entferntere. Nimmt man nämlich einen andern Punkt ε zwischen α und δ an, so ist zu zeigen, dass Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta >$ Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$. Da [*Command. XIV.*]

μετὰ τοῦ ἀπὸ δγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ἔστι δὲ καὶ ὑπὸ τῶν αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδβ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ δγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, ὧν τὸ ἀπὸ δγ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γε· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδβ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν αεβ.

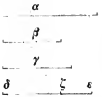
Εἰ γὰρ εἴη τὸ α μετὰ τοῦ β ἴσον τῷ γ μετὰ τοῦ δε, καὶ ἔλασσον τὸ β τοῦ δε· μεῖζον ἂν γένοιτο τὸ α τοῦ γ. Κείσθω γὰρ τῷ β ἴσον τὸ δζ· τὸ α ἄρα μετὰ τοῦ δζ ἴσον ἐστὶ τῷ δε μετὰ τοῦ γ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δζ· λοιπὸν ἄρα τὸ α ἴσον ἐστὶ τοῖς γ, ζε, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ α τοῦ γ.

Ἡ α πρὸς τὴν β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ η γ πρὸς τὴν δ· ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν α,δ τοῦ ὑπὸ τῶν β,γ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ α πρὸς τὴν β οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν ε· καὶ ἡ γ ἄρα πρὸς τὴν ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ε τῆς δ· καὶ κοινὸν ὕψος ἡ α, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ε,α τοῦ ὑπὸ τῶν α,δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν α,ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β,γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν β,γ τοῦ ὑπὸ τῶν α,δ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν α,δ τοῦ ὑπὸ τῶν β,γ. ὁμοίως καὶ ἐὰν ἐλάσσων ὁ λόγος γίνηται, ἔλασσον καὶ τὸ χωρίον τοῦ χωρίου. ἀλλὰ δὴ ἔστω πάλιν μεῖζον τὸ ὑπὸ τῶν α,δ τοῦ ὑπὸ τῶν β,γ, ὅτι ἡ α πρὸς τὴν β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ. κείσθω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν α,δ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν β,ε· γίνεται ἄρα μεῖζον μὲν τὸ ὑπὸ τῶν β,ε τοῦ ὑπὸ τῶν β,γ, ὥστε καὶ ἡ ε τῆς γ μείζων. ὡς δὲ ἡ α πρὸς τὴν β οὕτως ἡ ε πρὸς τὴν δ, ἡ δὲ ε πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ ἡ α ἄρα πρὸς τὴν β. ὁμοίως καὶ ἀναστρέψαντι.

Δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ καὶ τῶν αβ, βγ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ βδ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ δε· ὅτι ἡ γε ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβ, βγ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ. Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ αβγ συναμφοτέρου τῆς αβε ὑπερέχει τῇ γε, ἡ γε ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβγ συναμφοτέρου τῆς αβε· συν-

Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Quadrat über $\delta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\gamma$, und
Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\gamma$, so ist
Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Quadrat über $\delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\gamma\varepsilon$;
nun ist Quadrat über $\delta\gamma$ < Quadrat über $\gamma\varepsilon$,
folglich Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ > Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$.

Wenn $\alpha + \beta = \gamma + \delta\varepsilon$ und $\beta < \delta\varepsilon$, [*Command.* XV.] so ist $\alpha > \gamma$.



Es sei $\delta\zeta = \beta$, so ist $\alpha + \delta\zeta = \delta\varepsilon + \gamma$. Subtrahirt man die, gemeinschaftliche $\delta\zeta$, so ist $\alpha = \gamma + \zeta\varepsilon$, daher $\alpha > \gamma$.

Ist $\alpha : \beta > \gamma : \delta$, so ist Rechteck [*Command.* XVI.] $\alpha \,.\, \delta$ > Rechteck $\beta \,.\, \gamma$.



Macht man $\alpha : \beta = \gamma : \varepsilon$, so ist $\gamma : \varepsilon > \gamma : \delta$, mithin $\varepsilon < \delta$, folglich wenn α als gemeinsame Höhe angenommen wird, Rechteck $\varepsilon \,.\, \alpha$ < Rechteck $\alpha \,.\, \delta$. Aber Rechteck $\varepsilon \,.\, \alpha$ = Rechteck $\beta \,.\, \gamma$, mithin Rechteck $\beta \,.\, \gamma$ < Rechteck $\alpha \,.\, \delta$ oder Rechteck $\alpha \,.\, \delta$ > Rechteck $\beta \,.\, \gamma$. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass wenn das Verhältniss ein kleineres ist, auch das eine Rechteck kleiner als das andere sein wird.

Ist aber Rechteck $\alpha \,.\, \delta$ > Rechteck $\beta \,.\, \gamma$, so ist auch $\alpha : \beta > \gamma : \delta$. Setzt man nämlich Rechteck $\alpha \,.\, \delta$ = Rechteck $\beta \,.\, \varepsilon$, so ist Rechteck $\beta \,.\, \varepsilon$ > Rechteck $\beta \,.\, \gamma$, mithin $\varepsilon > \gamma$. Aber $\alpha : \beta = \varepsilon : \delta$, und $\varepsilon : \delta > \gamma : \delta$, folglich $\alpha : \beta > \gamma : \delta$. — Auf ähnliche Weise wird bewiesen, dass wenn das Rechteck kleiner ist, auch das Verhältniss kleiner sein wird.

Zwischen den beiden gegebenen Geraden [*Command.* XVII.] $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sei die mittlere Proportionale $\beta\delta$, und $\delta\varepsilon = \alpha\delta$, so ist $\gamma\varepsilon$ der Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ grösser ist, als die, deren Quadrat = 4 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.



αμφότερος δὲ ἡ αβε δύο εἰσὶν αἱ βδ, δύο δὲ αἱ βδ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ· ἡ γε ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβγ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἡ τῶν αβ, βγ μέση ἡ βδ, καὶ κείσθω τῇ αδ ἴση ἡ δε· ὅτι ἡ γε σύγκειται ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβ, βγ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ γε ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν γδ, δε, ἴση δέ ἐστιν ἡ αδ τῇ δε, ἡ γε ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν αδ, δγ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῶν αβ, βγ καὶ δύο τῶν βδ· δύο δὲ αἱ βδ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ· ἡ γε ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ.

Πάλιν τῶν αβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ βδ καὶ τῇ γδ ἴση κείσθω ἡ δε· ὅτι ἡ αε ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβγ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ αβγ. Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ αβγ συναμφοτέρου τῆς εβγ ὑπερέχει τῇ αε, συναμφότερος δὲ ἡ εβγ δύο εἰσὶν αἱ βδ, τουτέστιν ἡ δυναμένη τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ· ἡ αε ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβγ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ.

Πάλιν τῶν αβ, βγ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ βδ καὶ τῇ γδ ἴση κείσθω ἡ δε· ὅτι ἡ αε ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς αβγ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αε σύγκειται ἐκ τῶν αδ, δε, ἴση δέ ἐστιν ἡ δε τῇ δγ, ἡ αε ἄρα σύγκειται ἐκ τῶν αδ, δγ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς αβγ καὶ δύο τῶν βδ. δύο δὲ αἱ βδ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ· ἡ αε ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν αβγ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ.

Ταῦτα λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου ἀποτομήν· ταῦτα καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου ἀποτομὴν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.

Denn $\alpha\beta + \beta\gamma$ ist um $\gamma\varepsilon$ grösser als $\alpha\beta + \beta\varepsilon$, folglich ist $\gamma\varepsilon$ der Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ die $\alpha\beta + \beta\varepsilon$ übertrifft; aber $\alpha\beta + \beta\varepsilon = 2\beta\delta$ und Quadrat über $2\beta\delta = 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, folglich $\gamma\varepsilon$ der Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ grösser ist, als die, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Es sei wiederum $\beta\delta$ die mittlere Pro- [*Command.* XVIII.] portionale zwischen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon = \alpha\delta$, so ist $\gamma\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\alpha\beta + \beta\gamma$ und aus der Geraden, deren Quadrat $=$ 4 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

α γ β δ ε

Da $\gamma\varepsilon = \gamma\delta + \delta\varepsilon$ und $\alpha\delta = \delta\varepsilon$, so ist $\gamma\varepsilon = \alpha\delta + \delta\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma + 2\beta\delta$; aber Quadrat über $2\beta\delta = 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, folglich ist $\gamma\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\alpha\beta + \beta\gamma$ und aus der, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Es sei wiederum $\beta\delta$ die mittlere Propor- [*Command.* XIX.] tionale zwischen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon = \gamma\delta$, so ist $\alpha\varepsilon$ der Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ grösser als die, deren Quadrat $=$ 4 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

α ε δ γ β

Da $\alpha\beta + \beta\gamma$ um $\alpha\varepsilon$ grösser ist als $\varepsilon\beta + \beta\gamma$, aber $\varepsilon\beta + \beta\gamma = 2\beta\delta$, d. h. gleich der Geraden, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, so ist $\alpha\varepsilon$ der Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ grösser ist als die, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Ferner sei $\beta\delta$ die mittlere Proportionale [*Command.* XX.] zwischen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon = \gamma\delta$, so ist $\alpha\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\alpha\beta + \beta\gamma$ und aus der Geraden, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

α γ β δ ε

Da $\alpha\varepsilon = \alpha\delta + \delta\varepsilon$ und $\delta\varepsilon = \delta\gamma$, so ist $\alpha\varepsilon = \alpha\delta + \delta\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma + 2\beta\delta$; aber Quadrat über $2\beta\delta = 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, folglich ist $\alpha\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\alpha\beta + \beta\gamma$ und aus der Geraden, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Dies sind die Hülfssätze für den Verhältnissschnitt; dieselben gelten auch für den Raumschnitt, nur auf eine verschiedene Weise.

Πρόβλημα [1]) εἰς τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ τρισκαιδεκάτου τόπου ἀνακεφαλαίωσιν· Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, λαβεῖν ἐπεκβαλόντα τὴν αδ δοθὲν τὸ δ ποιοῦν τὸν τῆς βδ πρὸς δα λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς γδ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ αβγ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ. Ἄλλως οὐχ οἷονται συστῆναι, εἰ μὴ συναμφότερος μὲν ἡ δβ, αγ ἴση ᾖ τῇ εα ὑπεροχῇ, ὅλη δὲ ἡ δα ὅλη τῇ αβ, καὶ ἔτι τὰς εα, αγ, γβ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὴν βγ τῆς δε διπλασίαν εἶναι.[2]) Ἔστω γεγονός, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἡ αε, ἐν γὰρ τοῖς ἐπάνω εὕρομεν αὐτήν, ἔστιν οὖν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν αε. καὶ ἐναλλὰξ καὶ διελόντι χωρίον χωρίῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βγ,εα ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γδε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν βγ,εα· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γδε· καὶ παρὰ δοθεῖσαν τὴν γε παράκειται ὑπέρβαλλον τετραγώνῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ δ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἡ εα, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγ,εα ἴσον πάλιν τῇ γε παραβεβλήσθω ὑπέρβαλλον τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ γδε· λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖόν ἐστι τὸ δ. ἐπεὶ γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βγ,εα τῷ ὑπὸ τῶν γδε, ἀνάλογον καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ γδ πρὸς εα, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπεροχή. τὰ δ'αὐτὰ κἂν ζητῶμεν λαβεῖν σημεῖον ποιοῦν ὡς τὴν βδ πρὸς τὴν δα οὕτω τὴν γδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς αβγ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβγ. ὅπερ: —

Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ἕπτα, πτώσεις κδ, διορισμοὺς δὲ πέντε· ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι. καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ· μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ἕκτου καὶ τοῦ ἑβδόμου. τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς [ἔχει τόπους ιδ, πτώσεις ξγ, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου, ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς] [3]) ἔχει τόπους ζ, πτώσεις κδ, διορισμοὺς ζ, ὧν τέσσαρες μὲν

[1]) Diese Aufgabe und das Folgende scheinen spaterer Zusatz zu sein.

[2]) Der Inhalt dieses Satzes passt nicht zu dem Folgenden; *Halley* hat ihn deshalb ausgelassen.

[3]) Einschaltung von *Halley*

Eine Aufgabe zum zweiten Buch des Verhältnissschnittes, welche zur Recapitulation des dreizehnten Ortes zu gebrauchen ist: Es seien die Geraden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ gegeben, [*Command. XXI.*] es soll die Linie bis zum Punkt δ verlängert werden, so dass $\beta\delta$ zu $\delta\alpha$ sich verhält, wie $\gamma\delta$ zu dem Ueberschuss, um welchen $\alpha\beta + \beta\gamma$ grösser ist als die, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.



Man meint diese Aufgabe nur so zu lösen, dass $\delta\beta + \alpha\gamma$ dem Ueberschuss $\alpha\varepsilon$ gleich ist, dass $\delta\alpha = \alpha\beta$, dass $\varepsilon\alpha$, $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ zu einander in dem Verhältniss stehen wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, und dass $\beta\gamma = 2\,\delta\varepsilon$ ist.

Analysis. Der Ueberschuss sei $\alpha\varepsilon$ (wir haben ihn im Obigen gefunden), so ist $\beta\delta : \delta\alpha = \gamma\delta : \alpha\varepsilon$, mithin Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\alpha =$ Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$. Nun ist Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\alpha$ gegeben, daher auch Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$; dies an die gegebene Gerade $\gamma\varepsilon$ angelegt, geht um ein Quadrat darüber hinaus. Es ist also der Punkt δ gegeben.

Synthesis. Es sei $\alpha\varepsilon$ der Ueberschuss; man lege an $\gamma\varepsilon$ das Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$, welches dem Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\alpha$ gleich ist und über die Linie $\gamma\varepsilon$ um ein Quadrat hinausgeht, so ist der Punkt δ der gesuchte. Denn da Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\alpha =$ Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$, so ist $\beta\delta : \delta\alpha = \gamma\delta : \varepsilon\alpha$; es ist aber $\varepsilon\alpha$ der Ueberschuss.

Die Lösung der Aufgabe geschieht auf dieselbe Weise, wenn wir einen Punkt suchen, so dass $\beta\delta : \delta\alpha = \gamma\delta$ zu der Geraden, die aus $\alpha\beta + \beta\gamma$ und aus der zusammengesetzt ist, deren Quadrat $= 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Das erste Buch des Verhältnissschnittes enthält sieben Oerter, vier und zwanzig Fälle, fünf Determinationen, von denen drei Maxima, zwei Minima sind; ein Maximum findet statt im dritten Fall des fünften Ortes, Minima in den zweiten Fällen des sechsten und des siebenten Ortes, die übrigen Maxima in den vierten Fällen des sechsten und des siebenten Ortes. Das zweite Buch des Verhältnissschnittes hat vierzehn Oerter, drei und sechzig Fälle und die Determinationen des ersten Buchs; es bezieht sich nämlich ganz auf das erste Buch. Das erste Buch des Raumschnittes hat sieben Oerter, vier und zwanzig Fälle, sieben Determinationen, von denen vier Maxima, drei Minima sind. Die Maxima sind bei dem zweiten Fall des ersten Ortes, bei dem ersten Fall des zweiten Ortes, bei dem zweiten Fall des vierten Ortes, bei dem drit-

μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην [τοῦ δευτέρου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν][1] τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ [κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου, ἐλάχιστοι δὲ ὁ][2] κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ τετάρτου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου. τὸ δεύτερον χωρίον ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ, πτώσεις ξ, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό. ἐπιστήσειεν ἄν τις, διὰ τί ποτε μὲν τὸ τοῦ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ, τὸ δὲ τοῦ χωρίου ιγ. ἔχει δὲ διὰ τόδε, ὅτι ὁ ζ ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός· ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἷα ἐὰν διαχθῇ δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων τῆς ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς. ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι[3] ὁμοίως· διὰ τοῦτο οὖν προέχει τόπον ἕνα εἰς τὸν ἕβδομον[4] τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ὄντα.

Διωρισμένης τομῆς α.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος. Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ γ, δ, ε, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδε· ὅτι γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδε, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ αε πρὸς ὅλην τὴν βγ ἐστὶν ὡς ἡ εδ πρὸς δγ· καὶ ἀνάπαλιν. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδε, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ βδ πρὸς δγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ αβ πρὸς ὅλην τὴν γε ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς δγ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν εα οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δε, ὥστε καὶ ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς γε καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ βγ

[1] Einschaltung von *Halley*.

[2] Einschaltung von *Halley*.

[3] Vielleicht ist *οὐκ ἔστι* zu lesen.

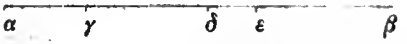
[4] So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben *δεύτερον*.

ten Fall des sechsten Ortes; die Minima sind bei dem dritten Fall des dritten Ortes, bei dem vierten Fall des vierten Ortes und bei dem ersten Fall des sechsten Ortes Das zweite Buch des Raumschnitts enthält dreizehn Oerter, sechzig Fälle, und die Determinationen aus dem ersten Buche, auf welches es sich bezieht. Es könnte nun jemand fragen, aus welchem Grunde das zweite Buch des Verhältnissschnittes vierzehn Oerter, das zweite Buch des Raumschnittes deren nur dreizehn enthält. Es kommt dies daher, dass der siebente Ort im Raumschnitt als an sich deutlich weggelassen ist; denn falls die beiden Parallelen aul die Endpunkte treffen, so schneidet jede durchgelegte Gerade ein gegebenes Rechteck ab, es ist nämlich dem gleich, welches aus den Geraden construirt wird, die zwischen den Endpunkten und dem Treffpunkt der beiden anfangs der Lage nach gegebenen Geraden liegen. Im Verhältnissschnitt ist dies anders; deshalb hat letzteres einen Ort, nämlich den siebenten des zweiten Buches, mehr. Das Uebrige ist unverändert.

Ueber den bestimmten Schnitt.

Erstes Buch.

Lemma, das für die erste Anordnung [*Command. XXII.*] des fünften Problems von Nutzen ist. Auf der Geraden $\alpha\beta$ seien die drei Punkte γ, δ, ε gegeben und es sei Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$, so ist $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.



Da Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$,

mithin $\alpha\delta : \delta\beta = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,

so ist auch $\alpha\varepsilon : \beta\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma$, und umgekehrt.

Ferner, da Reckteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$,

mithin $\alpha\delta : \delta\varepsilon = \beta\delta : \delta\gamma$,

ist auch $\alpha\beta : \gamma\varepsilon = \beta\delta : \delta\gamma$.

Es war aber auch $\beta\gamma : \varepsilon\alpha = \gamma\delta : \delta\varepsilon$,

daher $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma : \gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha = \beta\delta \,.\, \gamma\delta : \delta\gamma \,.\, \delta\varepsilon$

$= \beta\delta : \delta\varepsilon$,

folglich $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$, was zu beweisen war.

πρὸς αε ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ βδ πρὸς δγ καὶ ἡ γδ πρὸς τὴν εδ. ἀλλ' ὁ μὲν συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς γε καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ βγ πρὸς αε, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ ἐστίν· ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ βδ πρὸς δγ καὶ ἐξ οὗ ἡ γδ πρὸς δε, ὁ τῆς βδ πρὸς δε ἐστίν· καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. ὅπερ: —

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδε, ἀνάλογον καὶ ὅλη πρὸς ὅλην, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς δβ. συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ αε, γβ πρὸς γβ οὕτως ἡ αβ πρὸς βδ, τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αε,γβ καὶ τῆς βδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ αε πρὸς ὅλην τὴν βγ, ἐστὶν ὡς ἡ εδ πρὸς δγ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αε, γβ καὶ τῆς εδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεγ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αε, γβ καὶ τῆς βδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αβγ· ἐναλλὰξ ἄρα γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αε, γβ καὶ τῆς βδ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αε, γβ καὶ τῆς δε, τουτέστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ.

Ἄλλως εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος, πρότερον προθεωρηθέντων τῶν ἑξῆς δύο. Ἔστω ἴση ἡ αβ τῇ γδ, καὶ ἐπὶ τῆς γδ τυχὸν τὸ ε· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αγδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν αεδ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βεγ. Τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ζ σημεῖον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αγδ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζδ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζδ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγδ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεδ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ τε ὑπὸ τῶν βεγ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γζ τετραγώνῳ. καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς γζ τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεδ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βεγ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ ε σημεῖον ἐκτὸς τῆς αδ· ὅτι πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν βεγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αεδ καὶ τῷ

Ein anderer Beweis. Da Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma =$ Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$,

so ist $\alpha\varepsilon : \beta\gamma = \alpha\delta : \beta\delta$,

mithin $\alpha\varepsilon + \beta\gamma : \beta\gamma = \alpha\beta : \beta\delta$,

folglich Rechteck $(\alpha\varepsilon + \beta\gamma)\beta\delta =$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$.

Ferner ist, da $\alpha\delta : \delta\beta = \varepsilon\delta : \delta\gamma$

$\alpha\varepsilon : \beta\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,

mithin Rechteck $(\alpha\varepsilon + \beta\gamma)\varepsilon\delta =$ Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.

Nun war aber Rechteck $(\alpha\varepsilon + \beta\gamma)\delta\beta =$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$,

folglich $(\alpha\varepsilon + \gamma\beta)\beta\delta : (\alpha\varepsilon + \beta\gamma)\varepsilon\delta = \alpha\beta \,.\, \beta\gamma : \alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$,

d. h. $\delta\beta : \delta\varepsilon =$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.

Das Vorstehende kann noch auf andere Weise bewiesen werden, nachdem die beiden folgenden Sätze vorher dargethan sind. Ist $\alpha\beta = \gamma\delta$ und nimmt man auf $\gamma\delta$ einen [*Command.* XXIII.] beliebigen Punkt ε an, so ist Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta =$ Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.



Halbirt man $\beta\gamma$ in ζ, so ist

Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Quadrat über $\zeta\delta$.

Aus demselben Grunde ist

Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Quadrat über $\zeta\delta$, mithin Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$, folglich durch Subtraction des Quadrats über $\gamma\zeta$, Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.

Wenn unter derselben Voraussetzung [*Command.* XXIV.] der Punkt ε ausserhalb der Linie $\alpha\delta$ liegt, so ist ebenfalls Recht-

ὑπὸ τῶν βδγ. Τετμήσθω πάλιν ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ζ. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ βεγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζε, ὥστε τὸ ὑπὸ βεγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ δζ, τουτέστι τῷ ὑπὸ βδγ καὶ τοῦ ἀπὸ γζ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ γζ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ βεγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδε καὶ τῷ ὑπὸ βδγ.

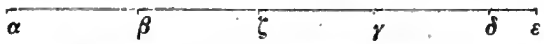
Τούτων προτεθεωρημένων δεῖξαι, ὅτι ἐὰν τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον τῷ ὑπὸ δβε, γίνεται ὡς ἡ δβ πρὸς βε οὕτω τὸ ὑπὸ αδγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ. Κείσθω γὰρ τῇ γε ἴση ἡ ζα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δβε, κοινὸν προςκείσθω τὸ ὑπὸ ζβ,βε, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ δζ,βε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ζβε καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβγ. ἀλλὰ ταῦτα διὰ τὸ προγεγραμμένον ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ζγε, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν αεγ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζδ,βε ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεγ. ἔξωθεν τὸ ὑπὸ τῶν ζδε· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ζδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζδ, βε, τουτέστιν ὡς ἡ εδ πρὸς εβ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ζδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς βε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν [ζδε μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αεγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν] [1]) αεγ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ζδε μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αεγ, διὰ τὸ προγεγραμμένον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδγ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αδγ πρὸς τὸ αεγ.

Ἐαν ῃ τριγωνον τὸ αβγ καὶ δύο διαχθῶσιν ὡς αδ, αε, ὥστε τὰς ὑπὸ βαγ, δαε γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι· γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βγδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βεδ οὕτω τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αε. Ἐὰν γὰρ περιγράψωμεν τῷ αβδ τρι-

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

eck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\delta\,.\,\delta\gamma$.

Wird wiederum $\beta\gamma$ in ζ halbirt, so ist



Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Quadrat über $\zeta\varepsilon$, daher Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ + Quadrat über $\delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\delta\,.\,\delta\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$,
folglich durch Subtraction des Quadrats über $\gamma\zeta$
Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\delta\,.\,\delta\gamma$.

Nachdem dies bewiesen, ist zu zeigen, [*Command.* XXV.] dass wenn Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\gamma$ = Rechteck $\delta\beta\,.\,\beta\varepsilon$, $\delta\beta:\beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$.

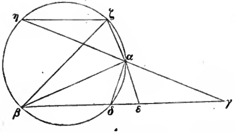


Es sei $\gamma\varepsilon = \zeta\alpha$. Da Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\gamma$ = Rechteck $\delta\beta\,.\,\beta\varepsilon$, so ist, wenn Rechteck $\zeta\beta\,.\,\beta\varepsilon$ hinzugefügt wird,
Rechteck $\delta\zeta\,.\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\zeta\beta\,.\,\beta\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\gamma$,
= Rechteck $\zeta\gamma\,.\,\gamma\varepsilon$ nach dem Vorhergegangenen,
= Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$,
folglich Rechteck $\delta\zeta\,.\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$.
Vergleicht man hiermit Rechteck $\delta\zeta\,.\,\delta\varepsilon$, also
Rechteck $\delta\zeta\,.\,\delta\varepsilon$: Rechteck $\delta\zeta\,.\,\beta\varepsilon$ (d. h. $\delta\varepsilon:\beta\varepsilon$) = Rechteck $\delta\zeta\,.\,\delta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$, so ist durch Zusammenfassen $\delta\beta:\beta\varepsilon$ = Rechteck $\delta\zeta\,.\,\delta\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$; aber nach dem Vorhergegangenen Rechteck $\delta\zeta\,.\,\delta\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\gamma$,
folglich $\delta\beta:\beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\gamma$.

Wenn in dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die beiden [*Command.* XXVI.] Linien $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ so gezogen werden, dass die Winkel $\beta\alpha\gamma$ und $\delta\alpha\varepsilon$ zwei Rechte betragen, so ist Rechteck $\beta\gamma\,.\,\gamma\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\varepsilon$.

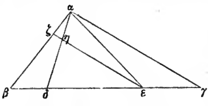
γώνῳ καὶ ἐκβληθῶσιν αἱ εα, γα ἐπὶ τὰ ζ, η, μεταβαίνει τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βγδ εἰς τὸ ὑπὸ τῶν ηγα, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν βεδ εἰς τὸ ὑπὸ τῶν ζεα, καὶ δεήσει ἐναλλὰξ ζητῆσαι, εἰ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ηγα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γα οὕτω τὸ ὑπὸ ζεα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εα. τοῦτο δὲ τὸ αὐτό ἐστι τῷ ζητεῖν, εἰ ἔστιν ὡς ἡ ηγ πρὸς τὴν γα οὕτως ἡ ζε πρὸς τὴν εα. εἰ ἄρα ἐστὶν ἡ ηζ, παράλληλός ἐστι τῇ βγ. ἔστι δέ· ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βαγ, δαε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δαε γωνία τῇ ὑπὸ βαη γωνίᾳ· ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ δαε ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ ἐκτὸς τετραπλεύρου, ἡ δὲ ὑπὸ βαη γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βζη, καὶ ἡ ὑπὸ ζβδ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βζη γωνία, καὶ εἰσὶν ἐναλλὰξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ηζ τῇ βγ. τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. εἰ ἄρα: —

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἔστω ἐν τριγώνῳ τῷ αβγ αἱ ὑπὸ βαγ, δαε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ βγδ πρὸς τὸ ὑπὸ βεδ οὕτω τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αε. Ἤχθω διὰ τοῦ ε τῇ αγ παράλληλος ἡ εζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ δαε γωνία τῇ ὑπὸ αζε γωνίᾳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζεη τῷ ἀπὸ αε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ αγ πρὸς τὴν ζε οὕτως ἡ γβ πρὸς βε, ὡς δὲ ἡ γα πρὸς ηε οὕτως ἡ γδ πρὸς δε, ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς γα πρὸς ζε καὶ ἐκ τοῦ τῆς γα πρὸς ηε ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς γβ πρὸς βε καὶ τοῦ τῆς γδ πρὸς δε· ἀλλ' ὁ μὲν συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς γα πρὸς ζε καὶ τοῦ τῆς γα πρὸς ηε ὁ τοῦ ἀπὸ γα ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ζε,ηε, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ αε· ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς γβ πρὸς βε καὶ τοῦ τῆς γδ πρὸς δε ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ὑπὸ βγ,γδ πρὸς τὸ ὑπὸ βε,δε. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βγδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βεδ οὕτω τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αε.



Wenn wir um das Dreieck $\alpha\beta\delta$ einen Kreis beschreiben und die Linien $\varepsilon\alpha$, $\gamma\alpha$ bis zu den Punkten ζ, η verlängern, so tritt an die Stelle des Rechtecks $\beta\gamma \cdot \gamma\delta$ das Rechteck $\eta\gamma \cdot \gamma\alpha$ und an die Stelle des Rechtecks $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ das Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\alpha$, und es ist zu untersuchen, ob Rechteck $\gamma\eta \cdot \gamma\alpha$ zu dem Quadrat über $\gamma\alpha$ sich verhält wie Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\alpha$ zu dem Quadrat über $\varepsilon\alpha$. Dies fällt aber mit dem zusammen, ob $\eta\gamma : \gamma\alpha = \zeta\varepsilon : \varepsilon\alpha$. Zieht man nun die Linie $\eta\zeta$, so ist sie parallel zu $\beta\gamma$, denn da $\angle\beta\alpha\gamma + \delta\alpha\varepsilon = 2R$, so ist $\angle\delta\alpha\varepsilon = \angle\beta\alpha\eta$, aber $\angle\delta\alpha\varepsilon = \angle\zeta\beta\delta$ als Aussenwinkel des Vierseits, und $\angle\beta\alpha\eta = \angle\beta\zeta\eta$, mithin $\angle\zeta\beta\delta = \angle\beta\zeta\eta$; dies sind aber Wechselwinkel, demnach $\eta\zeta \parallel \beta\gamma$. Das ist, was wir suchten. Wenn demnach u. s. w.

Ein anderer Beweis. Wenn in dem [*Command. XXVII.*] Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Winkel $\beta\alpha\gamma + \delta\alpha\varepsilon = 2R$, so ist Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\varepsilon$.



Zieht man durch ε die Linie $\varepsilon\zeta \parallel \alpha\gamma$, so ist $\angle\delta\alpha\varepsilon = \angle\alpha\zeta\varepsilon$, folglich Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\eta$ = Quadrat über $\alpha\varepsilon$. Da nun $\alpha\gamma : \zeta\varepsilon = \gamma\beta : \beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma : \eta\varepsilon = \gamma\delta : \delta\varepsilon$, so ist $\alpha\gamma \cdot \alpha\gamma : \zeta\varepsilon \cdot \eta\varepsilon = \gamma\beta \cdot \gamma\delta : \beta\varepsilon \cdot \delta\varepsilon$; aber Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \eta\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\varepsilon$, folglich Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\varepsilon$.

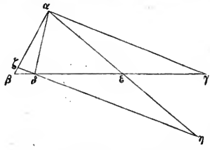
Ἔστω πάλιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν βαε, γαδ γωνία ὀρθή· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βγε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βδε οὕτω τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. Ἤχθω διὰ τοῦ δ τῇ αγ παράλληλος ἡ ζη, καὶ καθ' ὃ συμπίπτει τῇ αε, ἔστω τὸ η σημεῖον. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αδζ, ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζαη· τὸ ἄρα ὑπὸ ζδη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δα τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ [οὕτω] τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ὑπὸ ζδη· ἀλλὰ ὁ τοῦ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ ζδη συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς δη, τουτέστιν ἡ γε πρὸς εδ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς ζδ, τουτέστιν ἡ γβ πρὸς βδ· ὁ δὲ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ γε πρὸς εδ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ γβ πρὸς βδ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ὑπὸ βγε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ βγε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτω τὸ ἀπὸ γα τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ αδ τετράγωνον.

Τούτου ὄντος, ἄλλως τὸ προγεγραμμένον λῆμμα, ὅτι γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. Ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ δ τυχοῦσά τις εὐθεῖα ἡ δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον ὑποκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, γζ, εζ, βζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν γζδ ἴση ἐστὶ τῇ α γωνίᾳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν δζε γωνίᾳ τῇ β ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γζδ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ α· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν γζε ἴση ἐστὶ ταῖς α, β γωνίαις. ἀλλὰ αἱ α, β μετὰ τῆς ὑπὸ αζβ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ αζβ, γζε ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. γίνεται δὴ διὰ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα, ὡς τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε οὕτω τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε οὕτως ἐστὶν ἡ βδ πρὸς δε. (ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδε τῷ ἀπὸ δζ)[1] καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ.

---

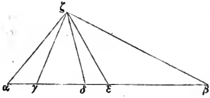
[1]) Die eingeklammerten Worte sind offenbar eingeschaltet und deshalb zu streichen. *Commandin.*

Ist ferner jeder der Winkel $\beta\alpha\varepsilon$. $\gamma\alpha\delta$ [*Command.* XXVIII.] ein Rechter, so verhält sich Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \cdot \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta$.



Zieht man durch den Punkt δ $\zeta\eta \parallel \alpha\gamma$, welche im Punkte η die verlängerte $\alpha\varepsilon$ schneidet, so ist $\angle\, \alpha\delta\zeta = R$; aber auch $\angle\, \zeta\alpha\eta = R$, folglich Rechteck $\zeta\delta \cdot \delta\eta$ = Quadrat über $\delta\alpha$. Nun ist Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Rechteck $\zeta\delta \cdot \delta\eta$; aber das Verhältniss des Quadrats über $\alpha\gamma$ zu Rechteck $\zeta\delta \cdot \delta\eta$ ist zusammengesetzt aus $\gamma\alpha : \delta\eta$ d. h. $\gamma\varepsilon : \varepsilon\delta$ und aus $\gamma\alpha : \zeta\delta$ d. h. $\gamma\beta : \beta\delta$. Nun ist $\gamma\varepsilon \cdot \gamma\beta : \varepsilon\delta \cdot \beta\delta$ = Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \cdot \delta\varepsilon$, folglich Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \cdot \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta$.

Auf Grund dessen kann das obige Lemma, [*Command.* XXIX.] dass nämlich $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$, noch anders bewiesen werden.



Man ziehe vom Punkte δ aus eine Gerade $\delta\zeta$, so dass Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\zeta$, und die Linien $\delta\zeta$, $\gamma\zeta$, $\varepsilon\zeta$, $\beta\zeta$. Da nun Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\zeta$, so ist $\angle\, \gamma\zeta\delta = \angle\, \alpha$. Ferner da Rechteck $\beta\delta \cdot \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\zeta$, so ist $\angle\, \delta\zeta\varepsilon = \angle\, \beta$; folglich $\angle\, \gamma\zeta\varepsilon = \alpha + \beta$. Aber $\alpha + \beta + \angle\, \alpha\zeta\beta = 2\,R$, mithin auch $\angle\, \alpha\zeta\beta + \gamma\zeta\varepsilon = 2\,R$. Es ist demnach nach dem vorausgegangenen Lemma Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$, aber Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon = \beta\delta : \delta\varepsilon$, folglich $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta$ $\beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. Πάλιν ὄντος ἴσου τοῦ ὑπὸ τῶν αδε τῷ ὑπὸ βδγ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εγα. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ αδ πρὸς δγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ βα πρὸς ὅλην τὴν γε ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, λοιπὴ ἄρα ἡ βε πρὸς λοιπὴν τὴν αγ ἐστὶν ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν δγ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γε, καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ βδ πρὸς τὴν δε καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, ὅς ἐστιν ὁ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς αβ πρὸς τὴν γε καὶ τοῦ τῆς εβ πρὸς τὴν αγ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εγα. ἔστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εγα. ὅπερ ἔδει: —

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δε, λοιπὴ ἄρα ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν εβ ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ αγ, εβ πρὸς τὴν εβ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βδ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, εβ καὶ τῆς βδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, λοιπὴ ἄρα ἡ βε πρὸς λοιπὴν τὴν γα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων, ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν δγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ εβ, αγ πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν γδ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς εβ, αγ καὶ τῆς γδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εγα. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, εβ καὶ τῆς βδ [ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αβε, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, εβ καὶ τῆς βδ][1]) πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, εβ καὶ τῆς γδ, τουτέστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εγα. ὅπερ: —

Ἄλλως τὸ αὐτό, προθεωρηθέντος τοῦδε· Οὔσης ἴσης τῆς αβ τῇ γδ, ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον τὸ ε, δεῖξαι ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αεδ τῷ ὑπὸ τῶν αγδ καὶ τῷ ὑπὸ βεγ. Τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ζ σημεῖον. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ αεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δζ, τὸ δ' ὑπὸ αγδ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δζ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ αεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγδ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ. του-

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

Lemma, welches für die zweite Anordnung desselben Problems von Nutzen ist. Wenn wiederum [*Command. XXX.*] Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\gamma$, so ist zu zeigen, dass $\beta\delta : \delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\alpha$.

$\alpha \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon \quad \beta$

Da $\beta\delta : \delta\varepsilon = \alpha\delta : \delta\gamma$,
so ist $\alpha\beta : \gamma\varepsilon = \beta\delta : \delta\varepsilon$.
Ferner da $\beta\delta : \delta\alpha = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,
so ist $\varepsilon\beta : \alpha\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma$.
Es war aber $\beta\delta : \delta\varepsilon = \alpha\beta : \gamma\varepsilon$,
folglich $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon : \delta\varepsilon \,.\, \delta\gamma = \alpha\beta \,.\, \varepsilon\beta : \gamma\varepsilon \,.\, \alpha\gamma$,
mithin $\beta\delta : \delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\beta, \varepsilon\beta$: Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \alpha\gamma$,
was zu beweisen war.

Ein anderer Beweis. Da $\alpha\delta : \delta\beta = \gamma\delta : \delta\varepsilon$,
so ist $\alpha\gamma : \varepsilon\beta = \alpha\delta : \delta\beta$,
mithin $\alpha\gamma + \varepsilon\beta : \varepsilon\beta = \alpha\beta : \delta\beta$
und Rechteck $(\alpha\gamma + \varepsilon\beta)\,\delta\beta$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\varepsilon$.
Ferner ist, da $\beta\delta : \delta\alpha = \varepsilon\delta : \delta\gamma$
$\varepsilon\beta : \alpha\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,
folglich $\varepsilon\beta + \alpha\gamma : \alpha\gamma = \varepsilon\gamma : \delta\gamma$
und Rechteck $(\varepsilon\beta + \alpha\gamma)\,\delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$.
Nun war Rechteck $(\alpha\gamma + \varepsilon\beta)\,\delta\beta$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\varepsilon$,
folglich Rechteck $(\alpha\gamma + \varepsilon\beta)\,\delta\beta$: Rechteck $(\alpha\gamma + \varepsilon\beta)\,\gamma\delta$ = Reckteck $\alpha\beta \,.\, \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$,
d. h. $\beta\delta : \gamma\delta$: Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$,
was zu beweisen war.

Dasselbe wird auf noch andere Weise [*Command. XXXI.*] bewiesen, wenn Folgendes vorher dargethan ist. Wenn $\alpha\beta = \gamma\delta$, und ein beliebiger Punkt ε angenommen wird, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \;\, \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.

$\alpha \quad \beta \quad \varepsilon \quad \zeta \quad \gamma$

Es sei $\beta\gamma$ in ζ halbirt, so ist
Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Quadrat über $\delta\zeta$,
und Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Quadrat über $\delta\zeta$,

τέστι τοῦ ὑπὸ βεγ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ εζ τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αεδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγδ καὶ τῷ ὑπὸ βεγ.

Τούτου προτεθεωρημένου, ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δβε· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βε οὕτω τὸ ὑπὸ [τῶν αδγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν][1] αεγ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ αζ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ζβδ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ζγδ καὶ τῷ ὑπὸ αβγ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δβε, ὁπότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ζβδ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ζγδ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ αδγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δβ,ζε. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δβε, ἀνάλογον καὶ διελόντι ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ οὕτως ἡ γδ πρὸς γβ ἐστί, τουτέστιν ἡ ζα πρὸς τὴν βγ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ζε πρὸς ὅλην τὴν εγ ἐστὶν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζεβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γεα. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζε,βδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αδγ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ζε,βδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζεβ, τουτέστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αδγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ.

Προθεωρηθέντος καὶ τοῦδε, ἄλλως τὸ αὐτὸ δειχθήσεται. Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ καὶ διήχθωσαν ἐντὸς αἱ αδ, αε, ποιοῦσαι ἑκατέραν τῶν ὑπὸ βαε, γαδ γωνίαν ὀρθήν· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βγε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βδε οὕτω τὸ ἀπὸ γα τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ αδ τετράγωνον. Περιγεγράφθω περὶ τὸ αβε τρίγωνον κύκλος ὁ αβζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαε, γαδ γωνία, διάμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν βε, ζη τοῦ κύκλου, ὥστε κέντρον ἐστὶ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ζθ τῇ θη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γη οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δζ, καὶ ἀνάπαλιν. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γη πρὸς τὴν γα οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγη πρὸς

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

daher Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\varepsilon\zeta$;
mithin durch Subtraction des gemeinschaftlichen Quadrats über $\varepsilon\zeta$, Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$.

Nachdem dies dargethan, sei Rechteck [*Command. XXXII.*] $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$ = Rechteck $\delta\beta \cdot \beta\varepsilon$; es soll bewiesen werden, dass $\delta\beta : \beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$.



Es sei $\alpha\zeta = \gamma\delta$, so ist nach dem Vorhergegangenen
Rechteck $\zeta\beta \cdot \beta\delta$ = Rechteck $\zeta\gamma \cdot \gamma\delta$ + Rechteck $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$.
Da nun Rechteck $\delta\beta \cdot \beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$,
so ist durch Subtraction

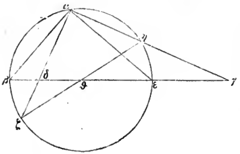
Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \delta\beta$ = Rechteck $\zeta\gamma \cdot \gamma\delta$
= Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$.

Ferner ergieht sich aus Rechteck $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$ = Rechteck $\delta\beta \cdot \beta\varepsilon$ wegen der daraus folgenden Proportion und der Differenz

$$\alpha\varepsilon : \beta\varepsilon = \delta\gamma : \beta\gamma$$
$$= \alpha\zeta : \beta\gamma,$$

mithin $\zeta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\beta$
und Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$.
Nun ist bewiesen, dass Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \delta\beta$ = Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$,
folglich Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \beta\delta$: Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ = Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$,
d. h. $\beta\delta : \varepsilon\beta$ = Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$.

Der Beweis kann noch anders geführt werden, wenn Folgendes vorher dargethan wird. Werden in [*Command. XXXIII.*] dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Linien $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ so gezogen, dass $\angle \beta\alpha\varepsilon = \angle \gamma\alpha\delta$ = R, so ist Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \cdot \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta$.



τὸ ἀπὸ τῆς γα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν βγε πρὸς τὸ ἀπὸ γα· ὡς δὲ ἡ ζδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζδα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, τουτέστι τὸ ὑπὸ βδε πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ἐναλλὰξ ἄρα γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ βγε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτω τὸ ἀπὸ γα τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ αδ τετράγωνον.

Τούτου ὄντος, ἄλλως τὸ προγεγραμμένον, ὅτι γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτως τὸ ὑπὸ αβε πρὸς τὸ ὑπὸ αγε. Ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ δ τῇ αβ ὀρθὴ ἡ δζ, καὶ ὁποτέρῳ τῶν ὑπὸ αδε, βδγ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ δζ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζγ, ζε, ζβ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν αζε, γζβ γωνία· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγε, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εγα οὕτω τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζγ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ γζ οὕτως ἐστὶν ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβε πρὸς τὸ ὑπὸ αγε.

Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ ἕκτου προβλήματος. Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ γ, δ, ε, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αβε ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γβδ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βε οὕτω τὸ ὑπὸ δαγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γεδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αβε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γβδ, ἀνάλογον καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τῶν αγ,εδ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν αγ οὕτω ἡ δα πρὸς τὴν αβ· τὸ ἄρα τῆς ὑπὸ τῶν αγ,εδ ὑπεροχῆς καὶ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δαγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν εδ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βε· λοιπὴ ἄρα ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν δε ἐστὶν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βε· διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν αγ,εδ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν εβ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς εβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γεδ. ἐδείχθη δὲ καὶ [τὸ ὑπὸ] τῆς τῶν αγ, εδ [ὑπεροχῆς] καὶ τῆς αβ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δαγ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ

Man beschreibe um das Dreieck $\alpha\beta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta\zeta\varepsilon$ und ziehe $\zeta\eta$. Da nun $\angle\beta\alpha\varepsilon = \angle\gamma\alpha\delta = R$, so ist $\beta\varepsilon$ als $\zeta\eta$ ein Durchmesser, folglich ϑ der Mittelpunkt des Kreises. Da ferner $\zeta\vartheta = \vartheta\eta$, so ist $\alpha\gamma : \gamma\eta = \alpha\delta : \delta\zeta$, und umgekehrt. Aber

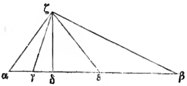
$$\gamma\eta : \gamma\alpha = \text{Rechteck } \alpha\gamma . \gamma\eta : \text{Quadrat über } \gamma\alpha$$
$$= \text{Rechteck } \beta\gamma . \gamma\varepsilon : \text{Quadrat über } \gamma\alpha;$$

ferner ist

$$\zeta\delta : \delta\alpha = \text{Rechteck } \zeta\delta . \delta\alpha : \text{Quadrat über } \delta\alpha$$
$$= \text{Rechteck } \beta\delta . \delta\varepsilon : \text{Quadrat über } \delta\alpha,$$

mithin Rechteck $\beta\gamma . \gamma\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\delta\alpha$.

Auf Grund dessen kann das obige [*Command.* XXXIV.] Lemma, dass nämlich $\beta\delta : \delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$, noch anders bewiesen werden.



Errichtet man im Punkt δ die Linie $\delta\zeta$ senkrecht auf $\alpha\beta$, so dass Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\beta\delta . \delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\zeta$, und zieht man die Linien $\alpha\zeta$, $\zeta\gamma$, $\zeta\varepsilon$, $\zeta\beta$, so ist $\angle\alpha\zeta\varepsilon = \gamma\zeta\beta = R$.

Demnach ist nach dem Vorhergegangenen Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\gamma$, aber Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\gamma = \beta\delta : \delta\gamma$,

mithin $\beta\delta : \delta\gamma$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$.

Zur ersten Anordnung des sechsten [*Command.* XXXV.] Problems. Auf der Geraden $\alpha\beta$ seien drei Punkte γ, δ, ε, und es sei Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\beta . \beta\delta$, so ist $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ = Rechteck $\delta\alpha . \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$.



Denn da Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\beta . \beta\delta$,

so ist $\alpha\beta : \gamma\beta = \beta\delta : \beta\varepsilon$,

folglich $\alpha\delta : \gamma\varepsilon = \alpha\beta : \gamma\beta$

und $\alpha\delta : \alpha\delta - \gamma\varepsilon = \alpha\beta : \alpha\beta - \gamma\beta$,

d. h. $\alpha\delta : \alpha\gamma - \delta\varepsilon = \alpha\beta : \alpha\gamma$,

daher Rechteck $(\alpha\gamma - \delta\varepsilon)\,\alpha\beta$ = Rechteck $\alpha\delta . \alpha\gamma$.

Ferner ist, da $\alpha\gamma : \varepsilon\delta = \gamma\beta : \beta\varepsilon$,

$\alpha\gamma - \varepsilon\delta : \varepsilon\delta = \gamma\varepsilon : \beta\varepsilon$,

olglich Rechteck $(\alpha\gamma - \varepsilon\delta)\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$.

τῆς τῶν αγ, δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς αβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς βε, τουτέστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βε οὕτω τὸ ὑπὸ δαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ διὰ τοῦ συνημμένου.[1]) Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ βδ πρὸς τὴν βε, λοιπὴ ἄρα ἡ αδ πρὸς λοιπὴν τὴν γε ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βε, λοιπὴ ἄρα ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν δε ἐστὶν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βε. ὥστε ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς αβ πρὸς βγ καὶ τοῦ τῆς γβ πρὸς βε, ὅς ἐστιν ὁ τῆς αβ πρὸς βε, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς αδ πρὸς γε καὶ τοῦ τῆς αγ πρὸς δε, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ὑπὸ δαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ.

Ἄλλως. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς αε ἡμικύκλιον τὸ αζε, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, γζ, δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βα, τὸ ὑπὸ τῶν αβε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βζ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αβε τῷ ὑπὸ γβδ ἴσον ὑπόκειται, καὶ τὸ ὑπὸ γβδ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βζ τετραγώνῳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν βζδ γωνία τῇ ὑπὸ βγζ γωνίᾳ, ὧν ἡ ὑπὸ βζε γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζαγ γωνίᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δζε γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αζγ γωνίᾳ ἴση ἐστίν. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν δαγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γεδ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε οὕτως ἐστὶν ἡ αβ πρὸς τὴν βε, ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν βε οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ δαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ.

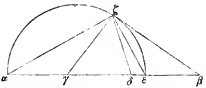
Λῆμμα εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. Ὄντος πάλιν ἴσου τοῦ ὑπὸ τῶν αβε τῷ ὑπὸ τῶν γβδ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ βγ πρὸς βδ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αγε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδε. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βε, λοιπὴ ἄρα ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν δε ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λοιπῶν, ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ λοιπὴ ἡ αδ πρὸς λοιπὴν τὴν γε ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς

[1]) Die Hdsch. haben τὸ αὐτοῦ συνημμένου oder τὸ αὐτὸ συνημμένον. Commandin emendirt τὸ αὐτὸ διὰ τοῦ συνημμένου.

Es war aber bewiesen, dass Rechteck $(\alpha\gamma - \varepsilon\delta)\,\alpha\beta$ = Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$, mithin Rechteck $(\alpha\gamma - \varepsilon\delta)\,\alpha\beta$: Rechteck $(\alpha\gamma - \varepsilon\delta)\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$, d. h. $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ = Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$.

Ein anderer Beweis mit Hülle des zusammengesetzten Verhältnisses. Da $\alpha\beta : \beta\gamma = \beta\delta : \beta\varepsilon$,
so ist $\alpha\delta : \gamma\varepsilon = \alpha\beta : \beta\gamma$.
Ferner, da $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\gamma : \beta\varepsilon$,
$\alpha\gamma : \delta\varepsilon = \beta\gamma : \beta\varepsilon$,
daher $\alpha\beta\,.\,\beta\gamma : \beta\gamma : \beta\varepsilon$ (d. h. $\alpha\beta : \beta\varepsilon$) = Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$.

Noch ein anderer Beweis. Man beschreibe über der Linie $\alpha\varepsilon$ den Halbkreis $\alpha\zeta\varepsilon$, lege daran die Tangente $\beta\zeta$ und ziehe die Linien $\alpha\zeta$, $\gamma\zeta$, $\delta\zeta$, $\varepsilon\zeta$. Da $\beta\zeta$ eine Tangente, welche die Secante $\beta\alpha$ in β schneidet, so ist Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\varepsilon$ = Quadrat über $\beta\zeta$;



aber Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\beta\,.\,\beta\delta$ nach der Vorraussetzung, folglich Rechteck $\gamma\beta\,.\,\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\zeta$; daher $\angle\,\beta\zeta\delta = \angle\,\beta\gamma\zeta$, und da $\angle\,\beta\zeta\varepsilon = \angle\,\zeta\alpha\gamma$, so ist $\angle\,\delta\zeta\varepsilon = \angle\,\alpha\zeta\gamma$. Daher Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$, aber Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon = \alpha\beta : \beta\varepsilon$, folglich $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ = Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$.

Lemma zu der ersten Anordnung des [*Command.* *XXXVI.*] ersten Problems. Wenn wiederum Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\beta\,.\,\beta\delta$, so ist zu zeigen, dass $\beta\gamma : \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\gamma\,.\,\gamma\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\varepsilon$.



Da $\alpha\beta : \beta\delta = \gamma\beta : \beta\varepsilon$,
so ist $\alpha\gamma : \delta\varepsilon = \gamma\beta : \beta\varepsilon$.
Aus demselben Grunde ist $\alpha\delta : \gamma\varepsilon = \delta\beta : \beta\varepsilon$, und umgekehrt;

τὴν βε, καὶ ἀνάπαλιν. ὥστε ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ γβ πρὸς τὴν βε καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ εβ πρὸς τὴν βδ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς γβ πρὸς τὴν βδ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αγ πρὸς τὴν δε καὶ ἡ γε πρὸς τὴν αδ, ὅς ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν αγε πρὸς τὸ ὑπὸ αδε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βδ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αγε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδε.

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βε, λοιπὴ ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν δε ἐστὶν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βε· ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν [τῶν] αγ,δε ὑπεροχὴν οὕτως ἐστὶν ἡ γβ πρὸς τὴν γε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αγε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς βγ. πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ αγ πρὸς λοιπὴν τὴν δε γίνεται ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, διελόντι ὡς ἡ τῶν αγ,δε ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν δβ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς δβ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ [βγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τῶν αγ,δε ὑπεροχῆς καὶ τῆς][1] δβ, τουτέστιν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βδ οὕτω τὸ ὑπὸ αγε πρὸς τὸ ὑπὸ αδε. ὅπερ ἔδει:—

Ἄλλως τὸ αὐτό. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς γδ ἡμικύκλιον τὸ γζδ, ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ζβ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, γζ, δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ αβε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γβδ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ γβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς βζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβε ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βζ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βζε γωνίᾳ τῇ α ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βζδ τῇ ὑπὸ ζγβ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εζδ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αζγ ἴση ἐστίν. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ αγε πρὸς τὸ ὑπὸ αδε· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ οὕτως ἐστὶν ἡ γβ πρὸς τὴν βδ, καὶ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ αγε πρὸς τὸ ὑπὸ αδε.

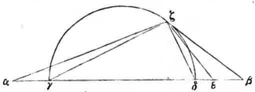
Εὐθεῖα ἡ αβ καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα τὰ γ, δ· ἔστω δὲ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ·

[1]) Einschaltung von Commandin.

daher $\gamma\beta . \beta\varepsilon : \beta\varepsilon . \beta\delta = \alpha\gamma . \gamma\varepsilon : \delta\varepsilon . \alpha\delta$,
d. h. $\gamma\beta : \beta\delta =$ Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$.

Ein anderer Beweis. Da $\alpha\beta : \beta\delta = \gamma\beta : \beta\varepsilon$
und $\alpha\gamma : \delta\varepsilon = \gamma\beta : \beta\varepsilon$,
folglich durch Umkehrung
$$\alpha\gamma : \alpha\gamma - \delta\varepsilon = \gamma\beta : \gamma\varepsilon,$$
daher Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon =$ Rechteck $(\alpha\gamma - \delta\varepsilon)\gamma\beta$.
Ferner ist, da $\alpha\gamma : \delta\varepsilon = \alpha\beta : \beta\delta$,
$$\alpha\gamma - \delta\varepsilon : \delta\varepsilon = \alpha\delta : \beta\delta,$$
mithin Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon =$ Rechteck $(\alpha\gamma - \delta\varepsilon)\beta\delta$;
folglich Rechteck $(\alpha\gamma - \delta\varepsilon)\beta\delta$: Rechteck $(\alpha\gamma - \delta\varepsilon)\gamma\beta =$ Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$,
d. h. $\gamma\beta : \beta\delta =$ Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$,
was zu beweisen war.

Noch ein anderer Beweis. Man beschreibe über der Linie $\gamma\delta$ den Halbkreis $\gamma\zeta\delta$, ziehe die Tangente $\zeta\beta$ und die Linien $\alpha\zeta$, $\gamma\zeta$, $\delta\zeta$, $\varepsilon\zeta$. Da nun Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon =$ Rechteck



$\gamma\beta . \beta\delta$, aber Rechteck $\gamma\beta . \beta\delta =$ Quadrat über $\beta\zeta$,
so ist auch Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon =$ Quadrat über $\beta\zeta$,
folglich $\angle \beta\zeta\varepsilon = \angle \alpha$.
Aber $\angle \beta\zeta\delta = \angle \zeta\gamma\beta$,
mithin $\angle \varepsilon\zeta\delta = \angle \alpha\zeta\gamma$.
Daher Quadrat über $\gamma\zeta$: Quadrat über $\zeta\delta =$ Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$; aber Quadrat über $\gamma\zeta$: Quadrat über $\zeta\delta = \gamma\beta : \beta\delta$, folglich $\gamma\beta : \beta\delta =$ Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta . \delta\varepsilon$.

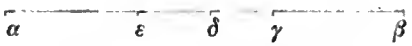
Auf der Geraden $\alpha\beta$ seien die beiden Punkte γ, δ, und es sei $\alpha\beta : \beta\gamma =$ Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\gamma$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma =$ Quadrat über $\beta\delta$. [*Command.* XXXVII.]

ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ δε. διελόντι ἄρα γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ οὕτω τὸ ὑπὸ γαε πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ εδγ· ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ οὕτως ἐστὶ κοινὸν ὕψος παραληφθείσης τῆς αε τὸ ὑπὸ τῶν γαε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε, γβ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν γαε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εδγ [οὕτω τὸ ὑπὸ γαε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε, γβ][1]· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε, γβ τῷ ὑπὸ τῶν εδγ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε, τουτέστι πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δβ πρὸς τὴν βγ, καὶ ὅλη ἡ αβ πρὸς ὅλην τὴν βδ ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βγ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ] βδ. ὅπερ: —

Ἔστω δὴ πάλιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ αβγ τῷ ἀπὸ βδ τετραγώνῳ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ δε. κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εα, βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γδε· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε, βγ τῷ ὑπὸ τῶν γδε. ἀνάλογον καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε, τουτέστι πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δβ πρὸς τὴν γβ καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αβ πρὸς λοιπὴν τὴν δβ ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν γβ· τὸ ἄρα ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ αβ καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ γ, δ, ε· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ βαε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ· ὅτι γίνεται καὶ ὡς τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αεδ οὕτω τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γε. Εἰλήφθω γὰρ ἰσότητος σημεῖον τὸ ζ, ὥστε ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν αζδ τῷ ὑπὸ βζε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν δζ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βαε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε, λῆμμα γὰρ ἐν διωρισμένῃ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ βαε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αζ πρὸς τὴν ζδ οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ· τὸ ἄρα ὑπὸ αζδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ βζε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζγ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν ζε οὕτω τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γε· ὡς δέ ἐστιν ἡ βζ πρὸς τὴν ζε οὕτως ἐστὶ

[1]) Einschaltung von Commandin.



Es sei $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, folglich ist

$\alpha\gamma : \gamma\beta =$ Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\delta$

$=$ Recbteck $\gamma\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\gamma$;

aber $\alpha\gamma : \gamma\beta =$ Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\beta$, wenn $\alpha\varepsilon$ als gemeinsame Höhe angenommen wird,

folglich Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\gamma =$ Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\beta$,

mithin Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\beta =$ Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\gamma$.

Daher $\alpha\delta : \delta\varepsilon$ d. h. $\delta\gamma = \delta\beta : \beta\gamma$

und $\alpha\beta : \delta\beta = \delta\beta : \beta\gamma$

oder Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma =$ Quadrat über $\delta\beta$,

was zu beweisen war.

Ist wiederum $\alpha\beta : \beta\gamma =$ Quadrat [*Command.* XXXVIII.] über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\gamma$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma =$ Quadrat über $\beta\delta$.



Es sei $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, so ist $\alpha\gamma : \beta\gamma$ d. h. Rechteck $\varepsilon\alpha . \alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\alpha . \beta\gamma =$ Rechteck $\varepsilon\alpha . \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\delta . \delta\varepsilon$,

folglich Rechteck $\varepsilon\alpha . \beta\gamma =$ Rechteck $\gamma\delta . \delta\varepsilon$.

Daher $\alpha\delta : \delta\varepsilon$, d. h. $\delta\gamma = \delta\beta : \beta\gamma$

und $\alpha\beta : \delta\beta = \delta\beta : \beta\gamma$,

mithin Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma =$ Quadrat über $\delta\beta$.

Auf der Geraden $\alpha\beta$ seien drei Punkte [*Command.* XXXIX.] γ, δ, ε, und es sei Rechteck $\beta\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon =$ Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\delta$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\alpha\beta . \beta\delta$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta =$ Quadrat über $\beta\gamma$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$.



Es sei $\beta\delta$ im Punkte ζ so getheilt, dass Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\delta =$ Rechteck $\beta\zeta . \zeta\varepsilon$. Nun ist nach einem Lemma über den bestimmten Schnitt $\alpha\zeta : \delta\zeta =$ Rechteck $\beta\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$,

aber Rechteck $\beta\alpha . \alpha\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon =$ Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\delta$,

daher $\alpha\zeta : \delta\zeta =$ Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\delta$,

folglich Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\delta$ d. h. Rechteck $\beta\zeta . \zeta\varepsilon =$ Quadrat über $\zeta\gamma$;

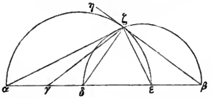
τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αεδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αεδ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γε.

Ἄλλως τὸ αὐτό. Γεγράφθω ἐπὶ τῶν αε, δβ εὐθειῶν ἡμικύκλια τὰ αζε, δζβ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζγ, ζδ, ζε, ζβ. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ αζβ, δζε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ βαε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτω τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ βαε πρὸς τὸ ὑπὸ βδε οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ αγ πρὸς ἀπὸ γδ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ οὕτω τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ, ὥστε καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γδ οὕτως ἡ αζ πρὸς τὴν ζδ. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ὑπὸ αζδ γωνία τῇ ζγ εὐθείᾳ. ἀλλὰ καὶ ἐκβληθείσης τῆς βζ ἐπὶ τὸ η, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δζε γωνία τῇ ὑπὸ ηζα γωνίᾳ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν εζγ ὅλῃ τῇ ὑπὸ τῶν γζη γωνίᾳ ἴση ἐστὶν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γε οὕτως ἡ βζ πρὸς τὴν ζε, καὶ ὡς το ἀπὸ πρὸς τὸ ἀπό. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αεδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αεδ οὕτω τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γε. ὅπερ: —

Ἔστω πάλιν ὡς τὸ ὑπὸ αγβ πρὸς τὸ ὑπὸ αεβ οὕτω τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γβε οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ. Εἰλήφθω πάλιν ἰσότητος σημεῖον τὸ ζ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αζβ τῷ ὑπὸ τῶν γζε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γζ πρὸς τὴν ζε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αγβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεβ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αγβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεβ οὕτω τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ γζε, τουτέστι τὸ ὑπὸ αζβ, τῷ ἀπὸ ζδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζβ οὕτω τὸ ἀπὸ δα πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, ὡς δὲ ἡ αζ πρὸς τὴν ζβ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γβε, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γβε οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ. ὅπερ: —

mithin $\beta\zeta : \zeta\varepsilon$ = Quadrat über $\beta\gamma$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$,
aber $\beta\zeta : \zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$,
folglich Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\beta\gamma$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$.

Ein anderer Beweis. Man beschreibe über den Linien $\alpha\varepsilon$, $\delta\beta$ die Halbkreise $\alpha\zeta\varepsilon$, $\delta\zeta\beta$ und ziehe die Linien $\alpha\zeta$, $\zeta\gamma$, $\zeta\delta$, $\zeta\varepsilon$, $\zeta\beta$. Da nun die Winkel $\alpha\zeta\beta$, $\delta\zeta\varepsilon$ zwei Rechte betragen, so ist Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\delta$, aber Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$: Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\delta$, folglich Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\delta$,



und $\alpha\gamma : \gamma\delta = \alpha\zeta : \zeta\delta$,
daher ist $\angle\, \alpha\zeta\delta$ durch die Linie $\zeta\gamma$ halbirt.
Verlängert man nun $\beta\zeta$ bis η, so ist $\angle\, \delta\zeta\varepsilon = \eta\zeta\alpha$,
folglich $\angle\, \varepsilon\zeta\gamma = \angle\, \gamma\zeta\eta$,
mithin $\beta\gamma : \gamma\varepsilon = \beta\zeta : \zeta\varepsilon$
und Quadrat über $\beta\gamma$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$; aber Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$, folglich Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\beta\gamma$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$, was zu beweisen war.

Es sei wiederum Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\gamma\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\beta$. [*Command. XL.*]



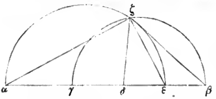
Wird wiederum der Punkt ζ so angenommen, dass Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta \,.\, \zeta\varepsilon$,
so ist $\gamma\zeta : \zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$,
aber Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\gamma\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$, folglich Rechteck $\gamma\zeta \,.\, \zeta\varepsilon$ d. h. Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$ = Quadrat über $\zeta\delta$;
daher $\alpha\zeta : \zeta\beta$ = Quadrat über $\delta\alpha$: Quadrat über $\delta\beta$,

Ἄλλως τὸ αὐτό. Γεγράφθω περὶ τὰς αε, γβ ἡμικύκλια τὰ αζε, γζβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, γζ, δζ, εζ, βζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αζγ γωνία τῇ ὑπὸ εζβ γωνίᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αγβ πρὸς τὸ ὑπὸ αεβ οὕτω τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ αγβ πρὸς τὸ ὑπὸ δεβ, οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε οὕτω τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὰ ἀπὸ ζε, ὥστε καὶ ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζε· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γζδ γωνία τῇ ὑπὸ δζε γωνίᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζγ γωνία τῇ ὑπὸ βζε γωνίᾳ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αζδ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ βζδ γωνίᾳ ἴση ἐστίν. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζβ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, ὡς δὲ τὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζβ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γβε· [ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γβε] οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ. ὅπερ ἔδει: —

Λήμματα χρήσιμα εἰς τὸ δεύτερον διωρισμένης τομῆς.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τρία σημεῖα τὰ γ, δ, ε, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν βδε, καὶ συναμφοτέρῳ τῇ αε, γβ ἴση κείσθω ἡ ζ· ὅτι γίνεται τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ζαδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βαε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζγδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βγε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζβδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αβγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζδε [ἴσον] τῷ ὑπὸ τῶν αεγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδε, ἀνάλογον καὶ ἀνάπαλιν καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ συνθένει ὡς συναμφότερος ἡ βγ, αε, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς τὴν αε οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αδ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζαδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδε. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ αε πρὸς

aber $\alpha\zeta : \zeta\beta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$,
folglich Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\alpha$: Quadrat über $\delta\beta$, was zu beweisen war.



Ein anderer Beweis. Beschreibt man über den Geraden $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$ die Halbkreise $\alpha\zeta\varepsilon$, $\gamma\zeta\beta$ und zieht die Linien $\alpha\zeta$, $\gamma\zeta$, $\delta\zeta$, $\varepsilon\zeta$, $\beta\zeta$, so ist $\angle\, \alpha\zeta\gamma = \angle\, \varepsilon\zeta\beta$, folglich Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\gamma\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$, aber Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\gamma\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$, mithin Quadrat über $\gamma\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\zeta$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$,

und $\gamma\delta : \delta\varepsilon = \gamma\zeta : \zeta\varepsilon$,
daher $\angle\, \gamma\zeta\delta = \angle\, \delta\zeta\varepsilon$,
aber $\angle\, \alpha\zeta\gamma = \angle\, \beta\zeta\varepsilon$,
folglich $\angle\, \alpha\zeta\delta = \angle\, \beta\zeta\delta$,
mithin Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\beta$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\beta$,
aber Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\gamma\beta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$,
folglich Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\beta$,
was zu beweisen war.

Lemmata zum zweiten Buche über den bestimmten Schnitt.

Es seien auf der Linie $\alpha\beta$ die Punkte γ, [*Command. XLI.*] δ, ε, so dass Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$, und beiden Linien $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$ zusammen sei die Linie ζ gleich, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\zeta \,.\, \alpha\delta$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$, Rechteck $\zeta \,.\, \gamma\delta$ = Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$, Rechteck $\zeta \,.\, \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, Rechteck $\zeta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.



ὅλην τὴν γβ ἔστιν ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ αε, γβ πρὸς τὴν γζ, τουτέστιν ὡς ἡ ζ πρὸς τὴν γβ οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν γδ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγε. τὰ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν· γίνεται ἄρα τέσσαρα.

Ἔστω νῦν πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδε, καὶ συναμφοτέρῳ τῇ αε, γβ ἴση κείσθω ἡ ζ· ὅτι πάλιν γίνεται τέσσαρα, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ζαδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βαε, τὸ δὲ ὑπὸ ζγδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν [βγε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζβδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν] αβγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζδε τῷ ὑπὸ τῶν αεγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδε, ἀνάλογον καὶ ἀνάπαλιν καὶ λοιπὰ πρὸς λοιπὰ καὶ συνθέσεις,˙ ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ αε,γβ πρὸς τὴν αε οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αδ, συναμφότερος δὲ ἡ αε,γβ ἴση ἐστὶ τῇ ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ πρὸς τὴν αε οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αδ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζαδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βαε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ· λοιπὴ ἄρα ἡ αε πρὸς λοιπὴν τὴν γβ ἐστὶν ὡς εδ πρὸς τὴν δγ. συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ αε,βγ, τουτέστιν ὡς ἡ ζ, πρὸς τὴν γβ οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν γδ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζγδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βγε. τὰ δ᾽ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο δείξομεν. γίνεται ἄρα τέσσαρα.

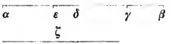
Ἔστω δὲ ἐκτὸς τῆς ὅλης τὸ σημεῖον, [1]) καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ: τῶν αδγ τῷ ὑπὸ βδε· ὅτι πάλιν. ἐὰν τῇ τῶν αε,γβ ὑπεροχῇ

---

[1]) So die Hdsch., vielleicht ist zu lesen: τὰ σημεῖα γ,δ.

Da $\quad$ Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$,
so ist $\quad \alpha\delta : \delta\varepsilon = \beta\delta : \delta\gamma$,
folglich $\quad \varepsilon\delta : \alpha\delta = \delta\gamma : \delta\beta$,
und $\quad \alpha\varepsilon : \alpha\delta = \gamma\beta : \delta\beta$,
mithin $\quad \gamma\beta : \alpha\varepsilon = \delta\beta : \alpha\delta$,
daher $\quad \zeta : \alpha\varepsilon = \beta\alpha : \alpha\delta$,
folglich $\quad$ Rechteck $\zeta \,.\, \alpha\delta$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$.
Ferner ist, da $\quad \alpha\varepsilon : \gamma\beta = \delta\varepsilon : \delta\gamma$,
$\quad \alpha\varepsilon + \gamma\beta : \gamma\beta = \delta\varepsilon + \delta\gamma : \delta\gamma$
d. h. $\quad \zeta : \gamma\beta = \gamma\varepsilon : \delta\gamma$,
daher $\quad$ Rechteck $\zeta \; \gamma\beta$ = Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$.
Ebenso in Betreff der übrigen; es finden also die 4 Gleichheiten statt.

Es sei wiederum Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = [*Command. XLII.*] Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$, und beiden Linien $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$ sei die Linie ζ gleich, so finden ebenfalls die vier Gleichheiten statt: Rechteck $\zeta \,.\, \alpha\delta$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$, Rechteck $\zeta \,.\, \gamma\delta$ = Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\varepsilon$, Rechteck $\zeta \,.\, \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, Rechteck $\zeta \,.\, \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$.



Da $\quad$ Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$,
so ist $\quad \alpha\delta : \delta\beta = \varepsilon\delta : \delta\gamma$
und $\quad \delta\beta : \alpha\delta = \delta\gamma : \varepsilon\delta$,
mithin $\quad \gamma\beta : \alpha\varepsilon = \delta\beta : \alpha\delta$
und $\quad \gamma\beta + \alpha\varepsilon : \alpha\varepsilon = \alpha\beta : \alpha\delta$,
oder $\quad \zeta : \alpha\varepsilon = \alpha\beta : \alpha\delta$,
folglich $\quad$ Rechteck $\zeta \,.\, \alpha\delta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\beta$.
Ferner ist, da $\quad \alpha\delta : \alpha\beta = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,
$\quad \alpha\varepsilon : \gamma\beta = \varepsilon\delta : \delta\gamma$,
folglich $\quad \alpha\varepsilon + \gamma\beta : \gamma\beta = \varepsilon\delta + \delta\gamma : \delta\gamma$,
d. h. $\quad \zeta : \gamma\beta = \varepsilon\gamma : \delta\gamma$,
also $\quad$ Rechteck $\zeta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\beta$.
Auf eben diese Weise wird es auch in Betreff der beiden übrigen nachgewiesen; es finden also die vier Gleichheiten statt.

Es seien ausserhalb der ganzen Linie [*Command. XLIII.*] die Punkte γ, δ, und Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$, so finden, wenn $\alpha\varepsilon - \gamma\beta = \zeta$ gesetzt wird, wiederum die vier Gleichheiten statt: Rechteck $\zeta \,.\, \alpha\delta$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$, Rechteck ζ.

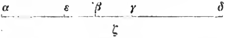
ἴση τεθῇ ἡ ζ, γίνεται τέσσαρα, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ζαδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βαε, τὸ δὲ ὑπὸ [τῶν ζγδ τῷ ὑπὸ][1]) βγε, τὸ δὲ ὑπὸ ζβδ τῷ ὑπὸ αβγ, τὸ δὲ ὑπὸ ζδε τῷ ὑπὸ αεγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδε, ἀνάλογον καὶ λοιπὰ πρὸς λοιπὰ καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς τὴν τῶν αε,γβ ὑπεροχὴν οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν αβ, ἡ δὲ τῶν αε,γβ ὑπεροχή ἐστιν ἡ ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ ζαδ ἴσον τῷ ὑπὸ βαε. πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ αε πρὸς λοιπὴν τὴν βγ ἐστὶν ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν δγ, διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν αε,γβ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν γδ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς, τουτέστι τῆς ζ καὶ τῆς γδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βγε. τὰ δ' αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο δείξομεν· γίνεται ἄρα τέσσαρα.

Τούτου δ' ἂν δειχθέντος ῥᾳδίως εὑρεθείη τὰ εἰς τὸ πρῶτον διωρισμένης· τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὅτι[2]) γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ὑπὸ τῶν ζβδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αβγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ζδε τῷ ὑπὸ αεγ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ζδβ πρὸς τὸ ὑπὸ ζδε, τουτέστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ.

Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. Ἔστω πάλιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν [αδγ τῷ ὑπὸ τῶν][3]) βδε καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ ζ· ὅτι ἐὰν συναμφοτέρῳ τῇ αε,γβ ἴση τεθῇ ἡ η, τὸ ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν βζε ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται τὸ ὑπὸ τῶν ηδε ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αεγ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ τῶν ηζε, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδζ ἡ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αεγ

[1]) Einschaltung von Commandin.
[2]) Die Hdsch. haben οὕτω.
[3]) Einschaltung von Commandin.

$\gamma\delta$ = Rechteck $\beta\gamma . \gamma\varepsilon$, Rechteck $\zeta . \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$, Rechteck $\zeta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$.



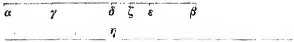
Da Rechteck $\alpha\delta . \delta\gamma = \beta\delta . \delta\varepsilon$,
so ist $\alpha\delta : \delta\beta = \delta\varepsilon : \gamma\delta$,
mithin $\alpha\varepsilon : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\beta$
und $\alpha\varepsilon : \alpha\varepsilon - \beta\gamma = \alpha\delta : \alpha\beta$
d. h. $\alpha\varepsilon : \zeta = \alpha\delta : \alpha\beta$,
folglich Rechteck $\zeta . \alpha\delta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha . \alpha\beta$.
Ferner ist, da $\alpha\varepsilon : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \gamma\delta$
$\alpha\varepsilon - \beta\gamma : \beta\gamma = \varepsilon\gamma : \gamma\delta$,
d. h. $\zeta : \beta\gamma = \varepsilon\gamma : \gamma\delta$,
folglich Rechteck $\zeta . \beta\gamma$ = Rechteck $\beta\gamma . \gamma\varepsilon$.

Auf eben diese Weise wird es auch in Betreff der beiden übrigen nachgewiesen; es finden also die vier Gleichheiten statt.

Nachdem dies gezeigt ist, wird das Folgende in Betreff des ersten Buches über den bestimmten Schnitt leicht nachgewiesen: Wenn dieselbe Voraussetzung bleibt, so ist [*Command. XLIV.*] $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$. Denn da gezeigt ist, dass

Rechteck $\zeta . \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$,
Rechteck $\zeta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$,
so ist Rechteck $\zeta . \beta\delta$: Rechteck $\zeta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$,
mithin $\beta\delta : \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$.

Zur ersten Anordnung des ersten Problems. [*Command. XLV.*] Es sei wiederum Rechteck $\alpha\delta . \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$ und ζ ein beliebiger Punkt, so ist, wenn $\alpha\varepsilon + \gamma\beta = \eta$ gesetzt wird, Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\beta\zeta . \zeta\varepsilon$ = Rechteck $\eta . \delta\zeta$.



Da nachgewiesen ist, dass Rechteck $\eta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$, so ist, wenn das Rechteck $\eta . \zeta\varepsilon$ auf beiden Seiten subtrahirt wird,

Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ — Rechteck $\eta . \zeta\varepsilon$
= Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\zeta$ — (Rechteck $\eta . \zeta\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\zeta$)

τοῦ ὑπὸ τῶν ηεζ· ὡς[1]) *δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αεγ τοῦ ὑπὸ τῶν ηεζ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν αεζ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αε,γζ τοῦ ὑπὸ τῶν βγ,ζε· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αε,γζ τοῦ ὑπὸ τῶν γβ,ζε, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν γζε, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν βζε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν βζε ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ηδζ. ὅπερ:*

Ἄλλο εἰς τὸ τρίτον τοῦ τρίτου. Ἔστω τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν ε,β τὸ ζ[2])*· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ εζβ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ προαποδέδεικται τὸ ὑπὸ τῶν ηδε ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αεγ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ὑπὸ ηεζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδζ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν αεγ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεζ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγ,εζ· ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αεγ μετὰ τοῦ ὑπὸ αεζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αε,γζ. γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ ηζδ ἴσον τῷ τε ὑπὸ αε,γζ καὶ τῷ ὑπὸ γβ,εζ· ἀλλὰ πάλιν τὸ ὑπὸ γβ,εζ ἴσον τῷ τε ὑπὸ γζε καὶ τῷ ὑπὸ εζβ· τὸ δὲ ὑπὸ αε,γζ μετὰ τοῦ ὑπὸ γζε ὅλον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζγ. εἴχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζβ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ηδζ τῷ τε ὑπὸ αγζ καὶ τῷ ὑπὸ εζβ.*

Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἔστω πάλιν τὸ σημεῖον ἐπὶ[3]) *τῆς αβ τὸ ζ, δεῖξαι ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηδβ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αβγ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ηβζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδζ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν αβγ καὶ τῷ ὑπὸ ηζβ, τουτέστι τῷ τε ὑπὸ αε,βζ καὶ τῷ ὑπὸ γβζ· τὸ δὲ ὑπὸ αβγ μετὰ τοῦ ὑπὸ γβζ ὅλον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζ,γβ· τὸ ἄρα ὑπὸ ηδζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αζ,γβ καὶ τῷ ὑπὸ αε,βζ. τὸ δὲ ὑπὸ αζ,γβ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,βζ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν εβζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ηδζ ἄρα ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν εζβ.*

---

[1]) So die Hdsch., dafür ist zu lesen *ᾧ*.

[2]) Die Hdsch. haben *μετὰ τὸ σημεῖον τῶν ε,β τὸ ζ.*

[3]) *Commandin* macht die Conjectur *ἐκτός*.

Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\zeta$ — Rechteck $\gamma\beta . \beta\varepsilon$,
= Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\zeta$ — Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\varepsilon$ —
(Rechteck $\gamma\beta . \zeta\varepsilon$ — Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\varepsilon$)
= Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$.

Ein anderer Satz zur dritten Anordnung des dritten Problems. Liegt der Punkt ζ zwischen den [*Command. XLVI.*] Punkten ε und β, so ist Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \delta\zeta$.

$\alpha \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon \quad \zeta \quad \beta$

η

Da früher gezeigt ist, dass Rechteck $\eta . \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$,
so ist Rechteck $\eta . \delta\varepsilon$ + Rechteck $\eta . \varepsilon\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$
+ Rechteck $\eta . \varepsilon\zeta$,
d. h. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\zeta$
+ Rechteck $\gamma\beta . \varepsilon\zeta$
= Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\zeta$ + Rechteck $\gamma\beta . \varepsilon\zeta$
= Rechteck $\alpha\varepsilon \; \gamma\zeta$ + Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\varepsilon$
+ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$
= Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
folglich Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$.

Zur ersten Anordnung des dritten [*Command. XLVII.*] Problems. Es sei wiederum auf der Linie $\alpha\beta$ der Punkt ζ, so ist zu zeigen, dass Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \delta\zeta$.

$\alpha \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon \quad \beta \quad \zeta$

η

Da Rechteck $\eta . \delta\beta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$,
so ist Rechteck $\eta . \delta\beta$ + Rechteck $\eta . \beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ +
Rechteck $\eta . \beta\zeta$
d. h. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$ +
Rechteck $\gamma\beta . \beta\zeta$
= Rechteck $\alpha\zeta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$,
aber Rechteck $\alpha\zeta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ —
Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
folgl. Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \delta\zeta$.

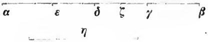
Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. Ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν εδβ, σημεῖον ἔστω τὸ ζ μεταξὺ τῶν δ,γ, καὶ συναμφοτέρῳ τῇ αε,γβ ἴση κείσθω ἡ η· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εζβ τοῦ ὑπὸ αζγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηδγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βγε, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ τῶν ηζγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ηδζ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν εγβ τοῦ ὑπὸ τῶν ηγζ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν εγβ τοῦ ὑπὸ τῶν ηζγ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ βγζ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν εζ,γβ τοῦ ὑπὸ αε,ζγ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εζ,γβ τοῦ ὑπὸ αε,ζγ, κοινοῦ προστεθέντος[1]) τοῦ ὑπὸ εζγ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εζβ τοῦ ὑπὸ αζγ, καὶ τὸ ὑπὸ εζβ ἄρα τοῦ ὑπὸ αζγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηδζ.

Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος. Ἀλλὰ ἔστω τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν γ,β τὸ ζ· ὅτι γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ βζε ἴσον τῷ ὑπὸ ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγε, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ηγζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βγε καὶ τῷ ὑπὸ ηγζ, ὅ ἐστι τῷ τε ὑπὸ αε,γζ καὶ τῷ ὑπὸ βγζ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ εγβ μετὰ τοῦ ὑπὸ βγζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ εζ,γβ. γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ εζ,γβ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,γζ ἴσον τῷ ὑπὸ ηδζ· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εζ,γβ ἴσον τῷ τε ὑπὸ εζγ καὶ τῷ ὑπὸ βζε, τὸ δὲ ὑπὸ εζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,γζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζγ· τὸ ἄρα ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ βζε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηδζ.

Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἔστω δὴ τὸ σημεῖον ἐκτὸς τῆς αβ τὸ ζ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αζγ τοῦ ὑπὸ τῶν εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ηζδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηδβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβγ, κοινὸν προσκείσθω τὸ

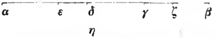
[1]) Conjectur Commandin's; die Hdsch. haben ἀφαιρεθέντος.

Zur zweiten Anordnung desselben [*Command. XLVIII.*] Problems. Es sei Rechteck $\alpha\delta \, . \, \delta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta \, . \, \delta\beta$, der Punkt ζ liege zwischen δ und γ, und $\alpha\varepsilon + \gamma\beta = \eta$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$ = Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$.



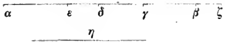
Da Rechteck $\eta \, . \, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$,
so ist Rechteck $\eta \, . \, \delta\gamma$ — Rechteck $\eta \, . \, \zeta\gamma$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ — Rechteck $\eta \, . \, \zeta\gamma$,
d. h Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ — Rechteck $\eta \, . \, \zeta\gamma$
= Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ — Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\zeta$ —
(Rechteck $\eta \, . \, \zeta\gamma$ — Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\zeta$)
= Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \gamma\beta$ — Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \zeta\gamma$
= Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \gamma\beta$ + Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\gamma$ —
(Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\gamma$)
= Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$,
folgl. Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$ = Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$.

Zur zweiten Anordnung des zweiten [*Command. XLIX.*] Problems. Wenn aber der Punkt ζ zwischen γ und β liegt, so ist Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta \, . \, \zeta\varepsilon$ = Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$.



Da Rechteck $\eta \, . \, \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$,
so ist Rechteck $\eta \, . \, \delta\gamma$ + Rechteck $\eta \, . \, \gamma\zeta$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ + Rechteck $\eta \, . \, \gamma\zeta$,
d. h. Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \gamma\zeta$ + Rechteck $\beta\gamma \, . \, \varepsilon\zeta$
= Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \gamma\zeta$ + Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta \, . \, \varepsilon\zeta$
= Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \gamma\zeta$ + Rechteck $\beta\zeta \, . \, \varepsilon\zeta$,
folgl. Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta \, . \, \zeta\varepsilon$.

Zur zweiten Anordnung des dritten Problems. [*Command. L.*] Es sei der Punkt ζ ausserhalb der Linie $\alpha\beta$, so ist Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\beta$ = Rechteck $\eta \, . \, \delta\zeta$.



ὑπὸ τῶν [ηβζ. ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν][1] ηδζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν αβγ καὶ τῷ ὑπὸ ηβζ, ὅ ἐστι τῷ τε ὑπὸ αε,ζβ καὶ τῷ ὑπὸ γβζ· τὸ δὲ ὑπὸ αβγ μετὰ τοῦ ὑπὸ γβζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζ,γβ· τὸ ἄρα ὑπὸ αζ,γβ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,ζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηδζ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αζ,βγ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,ζβ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ, καὶ τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηδζ. ὅπερ ἔδει: —

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. Ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αδ,δγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδ,δε, καὶ τῇ τῶν αε,βγ ὑπεροχῇ ἴση κείσθω ἡ η, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ ζ μεταξὺ τῶν ε,β· ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῆς η καὶ τῆς ζδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αβγ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ὑπὸ ηβζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ηζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αβγ καὶ τῷ ὑπὸ ηβζ, ὅ ἐστι τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βζ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αβγ τὸ ὑπὸ αζ,θγ ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ζβ,βγ. γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ ηζδ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν αζ,βγ καὶ τῷ ὑπὸ γβ,βζ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αε,γβ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βζ, τὸ δὲ ὑπὸ γβ,βζ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν αε,γβ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αε,ζβ. τὸ οὖν ὑπὸ ηζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν αζ,γβ καὶ τῷ ὑπὸ αε,ζβ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αζ,βγ μετὰ τοῦ αε,βζ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ· τὸ ἄρα ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηζδ. ὅπερ: —

Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν β,γ· ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ εζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν η καὶ τῆς ζδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ηγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εγβ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ηζγ, ὅλον[2] ἄρα τὸ ὑπὸ ηζδ τῷ ὑπὸ εγβ καὶ τῷ ὑπὸ ηζγ ἐστὶν ἴσον· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ηζγ τὸ ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ἐστὶν ὑπεροχῆς καὶ τῆς ζγ, τὸ δὲ ὑπὸ εγβ τὸ

---

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

[2]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἀνάλογον und λόγον.

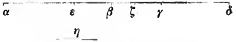
Da Rechteck $\eta . \delta\beta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$,
so ist Rechteck $\eta . \delta\beta$ + Rechteck $\eta . \beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $\eta . \beta\zeta$
= Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$ + Rechteck $\gamma\beta . \beta\zeta$
= Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$ + Rechteck $\alpha\zeta . \gamma\beta$;
aber Rechteck $\alpha\zeta . \gamma\beta$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \zeta\beta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
folgl. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
was zu beweisen war.

Zur dritten Anordnung des ersten Problems. [*Command. LI.*] Es sei Rechteck $\alpha\delta . \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$, $\alpha\varepsilon - \beta\gamma = \eta$, und es werde ein Punkt ζ zwischen ε und β angenommen, so ist Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \zeta\delta$.



Da Rechteck $\eta . \beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$,
so ist Rechteck $\eta . \delta\beta$ + Rechteck $\eta . \beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $\eta . \beta\zeta$
d. h. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\beta\zeta$
= Rechteck $\alpha\zeta . \beta\gamma$ + Rechteck $\zeta\beta . \beta\gamma$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\beta\zeta$
= Rechteck $\alpha\zeta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$,
aber Rechteck $\alpha\zeta . \beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
folgl. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
was zu beweisen war.

Zur ersten Anordnung des zweiten Problems. [*Command. LII.*] Wenn dieselben Voraussetzungen bleiben, der Punkt ζ aber zwischen β und γ liegt, so ist Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \zeta\delta$.



Da Rechteck $\eta . \gamma\delta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$,
so ist Rechteck $\eta . \gamma\delta$ + Rechteck $\eta . \zeta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$ + Rechteck $\eta . \zeta\gamma$,

ὑπὸ βγζ ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ εζ,βγ. γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ ηζδ ἴσον τῷ ὑπὸ εζ,βγ καὶ τῷ ὑπὸ βγζ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς γζ. [τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς γζ][1]) μετὰ τοῦ ὑπὸ βγζ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αε,γζ· τὸ ἄρα ὑπὸ ηζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αε,γζ καὶ τῷ ὑπὸ εζ,γβ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εζ,βγ τό τε ὑπὸ εζ.ζγ ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ βγ,βζ, τὸ δὲ ὑπὸ εζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ αε,ζγ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζγ· εἴχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζβ. τὸ ἄρα ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ εζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηζδ. ὅπερ: —

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἔστω πάλιν τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν γ.δ· ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ἐλλείπει τῷ ὑπὸ ηζδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ηγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εγβ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ηγζ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ηζδ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εγβ τοῦ ὑπὸ ηγζ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν αε,γβ ὑπεροχῆς καὶ τῆς γζ. ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εγβ τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν αε,γβ ὑπεροχῆς καὶ τῆς γζ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ ζγβ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εζ.βγ τοῦ ὑπὸ αε,γζ· κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ εζγ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ εζβ τοῦ ὑπὸ αζγ, ὥστε τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ἐλλείπει τῷ ὑπὸ τῆς η καὶ τῆς ζδ.

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἀλλὰ ἔστω ἐκτὸς τὸ ζ σημεῖον· ὅτι πάλιν τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηδζ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ηγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εγβ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ηγζ. ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ηδζ ἡ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ ηγζ τοῦ ὑπὸ εγβ· κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ βγζ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αε,γζ τοῦ ὑπὸ εζ,βγ, ἡ γὰρ[2]) τῶν αε,γβ ὑπεροχὴ μετὰ τῆς βγ ἡ αε ἐστιν. ᾧ δὲ πάλιν ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αε,γζ τοῦ ὑπὸ εζ.βγ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ εζγ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αζ,ζγ τοῦ ὑπὸ εζ,ζβ· τὸ ἄρα ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηδζ.

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben *ἄρα*.

d. h. Rechteck $\eta . \zeta\delta$ = Rechteck $\beta\gamma . \gamma\zeta$ + Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\zeta$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\,\zeta\gamma$
= Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\zeta$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \zeta\gamma$
= Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \zeta\gamma$,
= Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
daher Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$,
was zu beweisen war.

Zur dritten Anordnung des dritten Problems. [*Command. LIII.*] Es sei wiederum der Punkt ζ zwischen γ und δ, so ist Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ = Rechteck $\eta . \zeta\delta$.

$\alpha \quad \varepsilon \quad \beta \quad \gamma \quad \zeta \quad \delta$

η

Da Rechteck $\eta . \gamma\delta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$,
so ist Rechteck $\eta . \gamma\delta$ — Rechteck $\eta . \gamma\zeta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$ — Rechteck $\eta . \gamma\zeta$,
d. h. Rechteck $\eta . \zeta\delta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$ — Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\gamma\zeta$
= Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$ + Rechteck $\zeta\gamma . \gamma\beta$ — [Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\gamma\zeta$ + Rechteck $\zeta\gamma . \gamma\beta$]
= Rechteck $\varepsilon\zeta . \gamma\beta$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \zeta\gamma$,
= Rechteck $\varepsilon\zeta . \gamma\beta$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\gamma$ — (Rechteck $\alpha\varepsilon . \zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\gamma$)
folgl. Rechteck $\eta . \zeta\delta$ = Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$.

Zur dritten Anordnung des dritten Problems. [*Command. LIV.*] Liegt aber der Punkt ζ ausserhalb, so ist wiederum Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\eta . \delta\zeta$.

$\alpha \quad \varepsilon \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \zeta$

η

Da Rechteck $\eta . \gamma\delta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$,
so ist Rechteck $\eta . \gamma\zeta$ — Rechteck $\eta . \gamma\delta$ = Rechteck $\eta . \gamma\zeta$ — Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$.
d. h. Rechteck $\eta . \delta\zeta$ = Rechteck $\eta . \gamma\zeta$ — Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$
= Rechteck $\eta . \gamma\zeta$ + Rechteck $\beta\gamma . \gamma\zeta$ — (Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$ + Rechteck $\beta\gamma . \gamma\zeta$)
= Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\zeta$ — Rechteck $\varepsilon\zeta . \gamma\beta$

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Πάλιν ἔστω τὸ ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν α,ε· ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ εζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηζδ. Ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ηβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αβγ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ηβζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ηζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αβγ καὶ τῷ ὑπὸ ηζβ· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αζ,βγ καὶ τῷ ὑπὸ ζβγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ζβ μετὰ τοῦ ὑπὸ γβζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αε,βζ· [τὸ ὑπὸ αε,βζ] [1]) ἄρα ἐστὶ τό,τε ὑπὸ βζε καὶ τὸ ὑπὸ αζβ, ὃ μετὰ τοῦ ὑπὸ αζ,βγ ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζγ. τὸ οὖν ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ὑπὸ βζε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηζδ. ὅπερ: —

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἔστω δὴ πάλιν ἐκτὸς τὸ ζ σημεῖον· ὅτι τὸ ὑπὸ αζγ τοῦ ὑπὸ εζβ ἐλλείπει τῷ ὑπὸ ηζδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ηαδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βαε, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ηαζ, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ηδζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βαε καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν αε,γβ ὑπεροχῆς καὶ τῆς αζ. τὸ [2]) ὑπὸ ζβ,αε. λοιπὸν τὸ ὑπὸ ζα,βγ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ηζδ ἡ ὑπεροχή ἐστιν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ βζ,αε τοῦ ὑπὸ ζα,βγ. ἀλλὰ ᾧ τὸ ὑπὸ ζβ,αε τοῦ ὑπὸ ζα,βγ ὑπερέχει, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ βζα, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ βζε τοῦ ὑπὸ γζα· τὸ οὖν ὑπὸ βζε τοῦ ὑπὸ γζα ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ηζδ, ὥστε τὸ ὑπὸ γζα τοῦ ὑπὸ βζε ἐλλείπει τῷ ὑπὸ ηζδ. ἅπερ: —

---

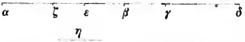
1) Einschaltung von *Commandin*.

2) An dieser Stelle sind die Hdsch. sehr lückenhaft. *Commandin* schlägt folgende Ergänzung vor: *πάλιν κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ζα,βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς τῶν αε,βγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς αζ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζα,βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζαε, τὸ δὲ ὑπὸ βαε μετὰ τοῦ ὑπὸ ζαε ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ζβ, αε· τὸ ἄρα ὑπὸ ζβ,αε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ηδζ καὶ τῷ ὑπὸ ζα,βγ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ηδζ. . . .*

$= \text{Rechteck } \alpha\varepsilon.\gamma\zeta + \text{Rechteck } \varepsilon\zeta.\zeta\gamma -$
$(\text{Rechteck } \varepsilon\zeta.\gamma\beta + \text{Rechteck } \varepsilon\zeta.\zeta\gamma)$
$= \text{Rechteck } \alpha\zeta.\gamma\zeta - \text{Rechteck } \varepsilon\zeta.\zeta\beta,$

folgl. Rechteck $\eta.\delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\gamma$ - Rechteck $\varepsilon\zeta.\zeta\beta$.

Zur dritten Anordnung des dritten Problems. [*Command. LV.*] Liegt wiederum der Punkt ζ zwischen α und ε, so ist Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\gamma$ + Rechteck $\varepsilon\zeta.\zeta\beta$ = Rechteck $\eta.\zeta\delta$.



Da Rechteck $\eta.\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta.\beta\gamma$,

so ist Rechteck $\eta.\beta\delta$ + Rechteck $\eta.\beta\zeta$ = Rechteck $\alpha\beta.\beta\gamma$ + Rechteck $\eta.\beta\zeta$,

d. h. Rechteck $\eta.\zeta\delta$ = Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ + Rechteck $\zeta\beta.\beta\gamma$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\,\zeta\beta$
= Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon.\zeta\beta$
= Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta.\zeta\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\beta$
= Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta.\zeta\varepsilon$,

was zu beweisen war.

Zur dritten Anordnung des dritten Problems. [*Command. LVI.*] Es sei wiederum der Punkt ζ ausserhalb, so ist Rechteck $\varepsilon\zeta.\zeta\beta$ — Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\gamma$ = Rechteck $\eta.\zeta\delta$.



Da Rechteck $\eta.\alpha\delta$ = Rechteck $\beta\alpha.\alpha\varepsilon$,

so ist Rechteck $\eta.\alpha\delta$ + Rechteck $\eta.\alpha\zeta$ = Rechteck $\beta\alpha.\alpha\varepsilon$ + Rechteck $\eta.\alpha\zeta$,

d. h. Rechteck $\eta.\zeta\delta$ = Rechteck $\beta\alpha.\alpha\varepsilon$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\,\alpha\zeta$.

Ferner ist Rechteck $\eta.\zeta\delta$ + Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ = Rechteck $\beta\alpha.\alpha\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ + Rechteck $(\alpha\varepsilon - \beta\gamma)\alpha\zeta$
= Rechteck $\beta\alpha.\alpha\varepsilon$ + Rechteck $\alpha\varepsilon.\alpha\zeta$
= Rechteck $\beta\zeta.\alpha\varepsilon$,

mithin Rechteck $\eta.\delta\zeta$ = Rechteck $\beta\zeta.\alpha\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$
= Rechteck $\beta\zeta.\alpha\varepsilon$ + Rechteck $\beta\zeta.\zeta\alpha$
— (Rechteck $\alpha\zeta.\beta\gamma$ + Rechteck $\beta\zeta.\zeta\alpha$)

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. Ἔστω ἡ αβ τῇ γδ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ ε μεταξὺ τῶν β,γ σημείων· ὅτι τὸ ὑπὸ αε,εδ τοῦ ὑπὸ βε,εγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ αγδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ αε,εδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αε,εγ, τουτέστι τῷ τε ὑπὸ βε,εγ καὶ τῷ ὑπὸ αβ,εγ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αε,γδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αεδ τοῦ ὑπὸ βε,εγ ὑπερέχει τῷ τε ὑπὸ εγ,αβ, τουτέστι τῷ ὑπὸ εγ,γδ, ἴσαι γάρ εἰσιν αἱ αβ,γδ, καὶ τῷ ὑπὸ αε,γδ· γίνεται ὅλον τὸ ὑπὸ αγ,γδ· τὸ ἄρα ὑπὸ αε,εδ τοῦ ὑπὸ βε,εγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ αγ,γδ.

Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. Ἔστω ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν γ,δ τὸ ε· ὅτι τὸ ὑπὸ αε,εδ μετὰ τοῦ ὑπὸ βε,εγ [ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγδ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αε,εδ] [1]) ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν αγ,εδ καὶ τῷ ὑπὸ γε,εδ, καὶ κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ βε,εγ, τὸ ἄρα ὑπὸ αεδ μετὰ τοῦ ὑπὸ βεγ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγ,εδ καὶ τῷ ὑπὸ γε,εδ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ βε,εγ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ γε,εδ μετὰ τοῦ ὑπὸ βε,εγ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδ,γε, τουτέστι τὸ ὑπὸ αγε, ἴσαι γάρ εἰσι καὶ ὅλαι αἱ αγ,βδ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ,εδ μετὰ τοῦ ὑπὸ αγε ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αγ,γδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αε,εδ μετὰ τοῦ ὑπὸ βε,εγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγδ.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τοὺς μοναχοὺς τοῦ τε πρώτου καὶ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος. Ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ αεβ ἐπὶ διαμέτρου τῆς βα, καὶ ὀρθῶν τῶν γε,δζ, καὶ ἀχθείσης εὐθείας τῆς εζη, καὶ ἐπ' αὐτῆς καθέτου τῆς βη, γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ γβ,βδ τῷ ἀπὸ βη, τὸ δὲ ὑπὸ αγ,δβ τῷ ἀπὸ ζη, τὸ δὲ ὑπὸ αδ,γβ τῷ ἀπὸ εη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ηγ, ηδ, αζ, εδ, αη, ζβ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, καὶ κάθετος ἡ ζδ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δζβ γωνία τῇ ὑπὸ βαζ γωνίᾳ· ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ δζβ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δηβ, ἡ δὲ ὑπὸ βαζ, ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ εβ, τῇ ὑπὸ βεζ, τουτέστι τῇ ὑπὸ βγη, καὶ ἡ

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

$=$ Rechteck $\beta\zeta.\zeta\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\zeta.\zeta\gamma$,

was zu beweisen war.

Zur dritten Anordnung des ersten Problems. [*Command. LVII.*] Es sei $\alpha\beta = \gamma\delta$, und ε ein beliebiger Punkt zwischen β und γ, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ — Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\delta$.



Da Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\delta$
= Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ + Rechteck $\alpha\beta . \varepsilon\gamma$
+ Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\delta$,

so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ — Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\beta . \varepsilon\gamma$ (d. h. Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\delta$) + Rechteck $\alpha\varepsilon . \gamma\delta$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\delta$.

Zur ersten Anordnung des ersten Problems. [*Command. LVIII.*] Wenn $\alpha\beta = \gamma\delta$ und ein Punkt ε zwischen γ und δ angenommen wird, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\delta$.

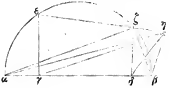


Da Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\gamma . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$,

so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$,
= Rechteck $\alpha\gamma . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\delta . \varepsilon\gamma$
= Rechteck $\alpha\gamma . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varepsilon$
= Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\delta$,

folgl. Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\delta$.

Lemma zu den singulären Sätzen der ersten, zweiten und dritten Anordnung. [*Command. LIX.*] Errichtet man auf dem Durchmesser $\alpha\beta$ des Halbkreises $\alpha\varepsilon\beta$ die Senkrechten $\gamma\varepsilon$, $\delta\zeta$, zieht die Linie $\varepsilon\zeta\eta$ und fällt die Senkrechte $\beta\eta$, so finden folgende drei Gleichheiten statt: Rechteck $\gamma\beta . \beta\delta$ = Quadrat über $\beta\eta$, Rechteck $\alpha\gamma . \delta\beta$ = Quadrat über $\zeta\eta$, Rechteck $\alpha\delta . \gamma\beta$ = Quadr. über $\varepsilon\eta$.



Man ziehe die Linien $\eta\gamma$, $\eta\delta$, $\alpha\zeta$, $\varepsilon\delta$, $\alpha\eta$, $\zeta\beta$. Da bei ζ ein rechter Winkel und $\zeta\delta$ eine Senkrechte ist, so ist $\angle\,\delta\zeta\beta = \angle\,\beta\alpha\zeta$, aber $\angle\,\delta\zeta\beta = \angle\,\delta\eta\beta$,

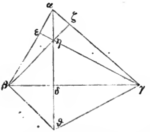
ὑπὸ δηβ ἄρα ἴση τῇ ὑπὸ βγη, ὥστε τὸ ὑπὸ γβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βη. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ὑπὸ αβδ ἴσον τῷ ἀπὸ βζ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αγ,δβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζη. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ, ὧν τὸ ὑπὸ γβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βη, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αδ,γβ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ εη τετραγώνῳ. γίγνεται ἄρα τρία.

Εἰς τὸν μοναχὸν τοῦ τρίτου προβλήματος. Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διήχθωσαν αἱ αδ, βε, γζ, ἔστω δὲ ἡ μὲν αδ ἐπὶ τῆς βγ κάθετος, ἐν κύκλῳ δὲ τὰ α, ζ, ε, η σημεῖα· ὅτι ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς ζ, ε γωνίαι. Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ, καὶ τῇ ηδ ἴση κείσθω ἡ δϑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βϑ,ϑγ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ϑ γωνία τῇ ὑπὸ βηγ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ζηε· ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ζηε μετὰ τῆς α δυσὶν ὀρθαῖς ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βϑγ ἄρα μετὰ τῆς α δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐστὶν, ἐν κύκλῳ ἄρα ἔστι τὰ α, β, ϑ, γ σημεῖα. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη γωνία τῇ ὑπὸ βγϑ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ηγδ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ η κατὰ κορυφὴν ἴσαι ἀλλήλαις, λοιπὴ ἄρα ἡ δ ἴση τῇ πρὸς τῷ ε, ὀρθὴ δέ ἐστιν ἡ δ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ ε σημείῳ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς ζ, ε σημείοις. ὅπερ: —

Ὁ μοναχὸς τοῦ πρώτου προβλήματος τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, γδ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αγδ οὕτω τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστός ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ αεδ πρὸς τὸ ὑπὸ βεγ· λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ αγ,βδ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αβ,γδ. Γεγράφθω περὶ τὴν αδ κύκλος, καὶ ἤχθωσαν ὀρθαὶ αἱ βζ, γη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αγδ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ βζ

und wenn $\beta\varepsilon$ gezogen wird, $\angle\beta\alpha\zeta = \angle\beta\varepsilon\zeta = \angle\beta\gamma\eta$, folglich $\angle\delta\eta\beta = \angle\beta\gamma\eta$, daher Rechteck $\gamma\beta.\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\eta$. Es ist aber auch Rechteck $\alpha\beta.\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\zeta$, mithin Rechteck $\alpha\beta.\beta\delta$ — Rechteck $\gamma\beta.\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\zeta$ — Quadrat über $\beta\eta$, d. h. Rechteck $\alpha\gamma.\beta\delta$ = Quadrat über $\zeta\eta$. Da ferner Rechteck $\alpha\beta.\beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$ und Rechteck $\gamma\beta.\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\eta$, so ist Rechteck $\alpha\beta.\beta\gamma$ — Rechteck $\gamma\beta.\beta\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$ — Quadrat über $\beta\eta$, d. h. Rechteck $\alpha\delta.\gamma\beta$ = Quadrat über $\varepsilon\eta$. Es finden demnach die drei Gleichheiten statt.

Zum singulären Satz des dritten Problems. [*Commund. LX.*] Es seien durch das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Linien $\alpha\delta$, $\beta\zeta$, $\gamma\varepsilon$ gezogen und es stehe $\alpha\delta$ auf $\beta\gamma$ senkrecht; liegen ferner die Punkte α, ζ, ε, η auf der Peripherie eines Kreises, so sind die Winkel bei ζ, ε rechte.



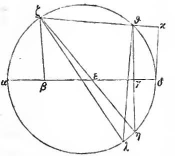
Verlängert man $\alpha\delta$, so dass $\eta\delta = \delta\vartheta$ und zieht $\beta\vartheta$, $\vartheta\gamma$, so ist $\angle\vartheta = \angle\beta\eta\gamma = \angle\zeta\eta\varepsilon$; aber $\angle\zeta\eta\varepsilon + \angle\alpha = 2\,R$ mithin auch $\angle\beta\vartheta\gamma + \angle\alpha = 2\,R$, folglich liegen die Punkte α, β, ϑ, γ auf der Peripherie eines Kreises; daher $\angle\beta\alpha\eta = \angle\beta\gamma\vartheta = \angle\eta\gamma\delta$. Es sind aber die Winkel bei η als Scheitelwinkel einander gleich, folglich ist $\angle\delta = \angle\varepsilon = R$. Auf eben diese Weise wird bewiesen, dass $\angle\zeta = R$. Es sind also die Winkel bei ζ, ε rechte, was zu beweisen war.

Der singuläre Satz des dritten Problems [*Commund. LXI.*] der dritten Anordnung. In Bezug auf drei gegebene gerade Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ ist, falls Rechteck $\alpha\beta.\beta\delta$: Rechteck $\alpha\gamma.\gamma\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$, das Verhältniss von Rechteck $\alpha\varepsilon.\varepsilon\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon.\varepsilon\gamma$ ein singuläres und kleinstes; ich behaupte nun, dass dasselbe auch stattfindet von dem Quadrat über $\alpha\delta$ zu dem Quadrat über dem Unterschied, um welchen die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma.\beta\delta$, von der, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta.\gamma\delta$, sich unterscheidet.

πρὸς τὸ ἀπὸ γη, οὕτω τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, καὶ μήκει ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν γη οὕτως ἡ βε πρὸς τὴν εγ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ζ, ε, η. ἔστω ἡ ζεη, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ μὲν ηγ ἐπὶ τὸ θ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ζθ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ δκ. καὶ διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα, γίνεται μὲν ὑπὸ αγ,βδ ἴσον τῷ ἀπὸ ζκ, τὸ δὲ ὑπὸ αβ,γδ τῷ ἀπὸ θκ· λοιπὴ ἄρα ἡ ζθ ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ αγ,βδ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αβ,γδ. ἤχθω οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἡ ζλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θλ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ζθλ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ εγη ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ λ τῇ πρὸς τῷ η γωνία ἴση, ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λζ πρὸς τὴν θζ, τουτέστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν θζ, οὕτως ἡ εη πρὸς τὴν εγ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ [θη οὕτω τὸ ἀπὸ][1]) εη πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, καὶ τὸ ὑπὸ ηε,εζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ αε,εδ, πρὸς τὸ ὑπὸ βε,εγ. καὶ ἔστιν ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ αε,εδ πρὸς τὸ ὑπὸ βε,εγ μοναχὸς [καὶ] ἐλάσσων ὁ λόγος, ἡ δὲ ζθ ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν αγ,βδ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αβ,γδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ζκ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, ὥστε ὁ μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ αγ,βδ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αβ,γδ. ὅπερ ἔδει: —

Ὁ μοναχὸς τοῦ τρίτου προβλήματος τοῦ δευτέρου ἐπιτάγματος. Πάλιν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, γδ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ αδβ πρὸς τὸ ὑπὸ αγβ οὕτω τὸ ἀπὸ δε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν αγ,βδ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν αδ,βγ πρὸς τὸ ἀπὸ

[1]) Einschaltung von *Commandin*.



Man beschreibe über $\alpha\delta$ einen Kreis und errichte die Senkrechten $\beta\zeta$, $\gamma\eta$. Da nun Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat über $\gamma\eta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$, so ist auch $\beta\zeta : \gamma\eta = \beta\varepsilon : \varepsilon\gamma$, daher liegen die Punkte ζ, ε, η in einer geraden Linie. Zieht man nun die Linie $\zeta\varepsilon\eta$, verlängert $\eta\gamma$ bis ϑ und $\zeta\vartheta$ bis $\varkappa$, und fällt die Senkrechte $\delta\varkappa$, so ist nach dem vorhergegang. Lemma

Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$ = Quadrat über $\zeta\varkappa$,

und Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\vartheta\varkappa$,

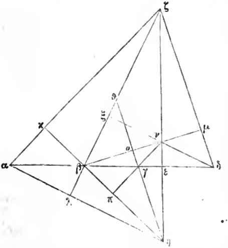
mithin ist $\zeta\vartheta$ der Unterschied, um welchen die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$, von der, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$, sich unterscheidet. Zieht man nun durch den Mittelpunkt $\zeta\lambda$ und verbindet $\vartheta\lambda$, so ist $\angle \zeta\vartheta\lambda = R = \angle \varepsilon\gamma\eta$, und da $\angle \lambda = \angle \eta$, so sind die Dreiecke $\zeta\vartheta\lambda$ und $\varepsilon\gamma\eta$ gleichwinklig, folglich

$$\lambda\zeta : \vartheta\zeta \text{ (d. h. } \alpha\delta : \vartheta\zeta) = \varepsilon\eta : \varepsilon\gamma$$

und Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\vartheta\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\eta$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Rechteck $\eta\varepsilon \,.\, \varepsilon\zeta$ (d. h. Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$) : Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$. Nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ ein singuläres und kleineres Verhältniss, und $\zeta\vartheta$ der Unterschied, um welchen die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$, von der, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$, sich unterscheidet, daher findet auch dasselbe singuläre und kleinere Verhältniss statt zwischen dem Quadrat über $\alpha\delta$ und dem Quadrat über dem Unterschied, um welchen sich die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$, von der unterscheidet, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$, was zu beweisen war.

Der singuläre Satz des dritten Problems [*Commaud. LXII.*] der zweiten Anordnung. Es ist wiederum in Bezug auf drei gegebene Gerade $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, falls Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$ = Quadrat über $\delta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$, das Verhältniss ein singuläres und kleineres, welches zwischen dem Quadrat über der Linie, bestehend aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$ und derjenigen, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \beta\gamma$, und dem Quadrat über $\delta\gamma$ stattfindet.

τῆς δγ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ αδ ὀρθὴ ἡ εζ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῷ ὑπὸ αδβ ἴσον τὸ ἀπὸ ζδ, καὶ τῇ ζδ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ηγ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ αδβ πρὸς τὸ ὑπὸ αγβ οὕτω τὸ ἀπὸ δε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, τουτέστι τὸ ἀπὸ δζ πρὸς τὸ ἀπὸ γη, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν αδβ τῷ ἀπὸ ζδ, καὶ τὸ ὑπὸ αγβ ἄρα ἴσον τῷ ἀπὸ γη. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αζ, ζβ, αη, ηβ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ αδβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δζ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βζδ γωνία τῇ ὑπὸ ζαβ γωνίᾳ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βηγ ἴση τῇ ὑπὸ βαη, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βζδ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βθη, αἱ ἄρα ὑπὸ βθη, βηθ γωνίαι, τουτέστιν ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ βκ, ἡ ὑπὸ κβζ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ λακ γωνίᾳ· ὥστε ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὰ α, λ, β, κ σημεῖα, διὰ ἄρα τὸ προγεγραμμένον γίνονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, λ σημείοις γωνίαι. ἤχθω δὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ζδ ἡ βμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δν καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ξ, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τῆς ζλ καὶ παράλληλος τῇ ηλ. πάλιν δὲ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ηγ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τῆς βν, καὶ γὰρ ἡ ζδ ἐπὶ τῆς νβ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ αγβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γη, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βηγ γωνίᾳ τῇ ηαγ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ βηγ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γνβ ἐκ κύκλῳ, ἡ δὲ ὑπὸ ηαβ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βδν ἐν παραλλήλῳ, καὶ ἡ ὑπὸ βνγ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βδν, τὸ ἄρα ὑπὸ δβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βν τετραγώνῳ. ἐπεὶ δὲ ἐν τριγώνῳ τῷ βδζ κάθετος ἦκται ἡ δνξ καὶ κεκλασμέναι πρὸς αὐτῇ εἰσιν αἱ ζν, νβ, ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ ζδ, δβ ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν ἀπὸ ζν, νβ ὑπεροχῇ, ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ ζδ,δβ ὑπεροχή ἐστι τὸ ὑπὸ αβδ, καὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν ζν νβ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τὸ ὑπὸ αβδ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ δβγ ἴσον τῷ ἀπὸ βν, ἡ νζ ἄρα ἐστὶν ἡ δυναμένη τοῦ ὑπὸ τῶν αγ,βδ. πάλιν ἐπεὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν νη,ηβ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ τῶν νγ,γβ ὑπεροχῇ, ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ νγ,γβ ὑπεροχή ἐστι τὸ ὑπὸ εγβ, καὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν νη,ηβ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν εγ,γβ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον τῷ ἀπὸ βη, ἡ νη ἄρα ἐστὶν ἡ δυναμένη ὅλον τὸ ὑπὸ αδ,βγ, ἀλλὰ καὶ ἡ ζν ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν αγ,βδ. ἐπειδὴ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ζκη γωνία καὶ κάθετος ἡ κε, τὸ ἄρα ὑπὸ αεβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζεη· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ οὕτω τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ὑπὸ



Man errichte im Punkt ε auf $\alpha\delta$ die Senkrechte $\varepsilon\zeta$ und verlängere sie, und es sei Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$ = Quadrat über $\zeta\delta$, und ziehe $\eta\gamma \parallel \zeta\delta$. Da nun Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$: Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$ = Quadrat über $\delta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\delta\zeta$: Quadrat über $\gamma\eta$, und Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$ = Quadrat über $\zeta\delta$, so ist auch Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$ = Quadrat über $\gamma\eta$. Zieht man nun die Linien $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, $\alpha\eta$, $\eta\beta$, so ist, da Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$ = Quadrat über $\delta\zeta$, $\angle \beta\zeta\delta = \angle \zeta\alpha\beta$; auch ist $\angle \beta\eta\gamma = \angle \beta\alpha\eta$, aber $\angle \beta\zeta\delta = \angle \beta\vartheta\eta$, daher $\angle \beta\vartheta\eta + \angle \beta\eta\vartheta$ d.h. wenn $\beta\eta$ verlängert wird $\angle \varkappa\beta\zeta = \angle \lambda\alpha\varkappa$. Mithin liegen die Punkte α, λ, β, $\varkappa$ auf der Peripherie eines Kreises, demnach sind nach dem vorausgegangenen Lemma die Winkel $\varkappa$, λ rechte. Fällt man die Senkrechte $\beta\mu$ auf $\zeta\delta$, zieht $\delta\nu$ und verlängert sie bis ξ, so steht sie auf $\zeta\lambda$ senkrecht und ist $\parallel \eta\lambda$. Wird ferner die Linie $\eta\gamma$ bis o verlängert, so ist sie auf $\beta\nu$ senkrecht, da $\zeta\delta$ auf $\beta\mu$ senkrecht steht. Da nun Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$ = Quadrat über $\gamma\eta$, so ist $\angle \beta\eta\gamma = \angle \eta\alpha\gamma$; aber $\angle \beta\eta\gamma = \angle \gamma\nu\beta$ als Winkel im Kreise, und $\angle \eta\alpha\beta = \angle \beta\delta\nu$, folglich $\angle \beta\nu\gamma = \angle \beta\delta\nu$; daher Rechteck $\delta\beta . \beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\nu$. Weil in dem Dreieck $\beta\delta\zeta$ die Senkrechte $\delta\nu\xi$ gefällt ist und die Senkrechten $\zeta\nu$, $\nu\beta$ sich auf ihr schneiden, so ist Quadrat über $\zeta\delta$ — Quadrat über $\delta\beta$ = Quadrat über $\zeta\nu$ — Quadrat über $\nu\beta$, aber Quadrat über $\zeta\delta$ — Quadrat über $\delta\beta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\delta$, folglich auch Quadrat über $\zeta\nu$ — Quadrat über $\nu\beta$ = Rechteck $\alpha\beta . \beta\delta$; nun ist Rechteck $\delta\beta . \beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\nu$, mithin $\nu\zeta$ = der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma . \beta\delta$. Da ferner Quadrat über $\nu\eta$ — Quadrat über $\eta\beta$ = Quadrat über $\nu\gamma$ - Quadrat über $\gamma\beta$, und Quadrat über $\nu\gamma$ — Quadrat über $\gamma\beta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$, so ist Quadrat über $\nu\eta$ — Quadrat über $\eta\beta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma . \gamma\beta$; nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\beta\eta$, mithin ist $\nu\eta$ die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\delta . \beta\gamma$; ebenso war $\zeta\nu$ die Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma . \beta\delta$. Weil $\angle \zeta\varkappa\eta$ = R und $\alpha\varepsilon$ eine Senkrechte ist, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$ = Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\eta$, folglich Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$: Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\eta$: Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$,

γεδ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς [ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς] [1]) γδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστιν ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ὑπὸ γεδ λόγος ὁ μοναχὸς καὶ ἐλάσσων, ἡ δὲ ζεη ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ [αγ,βδ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αδ,βγ], [2]) ὁ ἄρα ἐστὶ μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αγ, βδ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αδ,βγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ.

Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ἔστω ἴση ἡ μὲν αβ τῇ γδ, μεῖζον δὲ ὑπὸ βεγ τοῦ ὑπὸ αβδ· ὅτι τὸ ὑπὸ βεγ τοῦ ὑπὸ αεδ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ βδγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ βεγ ἴσον τῷ τε ὑπὸ βγε καὶ τῷ ἀπὸ εγ, τουτέστι καὶ τῷ ὑπὸ γεδ μετὰ τοῦ ὑπὸ εγδ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ βγε μετὰ τοῦ ὑπὸ εγδ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδ,γε, τουτέστι τὸ ὑπὸ αγ,γε· τὸ ἄρα ὑπὸ βεγ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγε καὶ τῷ ὑπὸ γεδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αγε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγ,εδ καὶ τῷ ὑπὸ αγ,γδ, τὸ δὲ ὑπὸ αγ,εδ μετὰ τοῦ ὑπὸ γεδ ὅλον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεδ. γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ βεγ ἴσον τῷ τε ὑπὸ αεδ καὶ τῷ ὑπὸ αγδ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ βδ,δγ, ὥστε τὸ ὑπὸ βεγ τοῦ ὑπὸ αεδ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ βδγ. ὅπερ ἔδει: —

Μοναχὸς τοῦ τρίτου προβλήματος. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, γδ, εζ, προστιθεμένης τινός, [3]) ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αγδ οὕτω τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ αεδ πρὸς τὸ

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) Einschaltung von *Commandin.*

[3]) Die Worte προστιθεμένης τινός hält *Commandin* für einen Zusatz von späterer Hand.

aber Rechteck $\zeta\varepsilon \, . \, \varepsilon\eta$: Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\zeta\eta$: Quadrat über $\gamma\delta$,

mithin Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\beta$: Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\zeta\eta$: Quadrat über $\gamma\delta$,

Es ist aber das Verhältniss von Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\beta$: Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ ein singuläres und kleineres, und die Linie $\zeta\varepsilon\eta$ besteht aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \beta\delta$ und aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\delta \, . \, \beta\gamma$; es ist daher das Verhältniss ein singuläres und kleineres, welches zwischen dem Quadrat über der Linie bestehend aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \beta\delta$ und aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\delta \, . \, \beta\gamma$, zu dem Quadrat über $\delta\gamma$ stattfindet.

Zur dritten Anordnung des dritten Problems. [*Command. LXIII.*] Wenn $\alpha\beta = \gamma\delta$ und Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma >$ Rechteck $\alpha\beta \, . \, \beta\delta$, so ist Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ um das Rechteck $\beta\delta \, . \, \delta\gamma$ grösser als Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$.



Da Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$
= Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$
+ Rechteck $\varepsilon\gamma \, . \, \gamma\delta$,

aber Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ + Rechteck $\varepsilon\gamma \, . \, \gamma\delta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma \, . \, \beta\delta$
= Rechteck $\varepsilon\gamma \, . \, \alpha\gamma$,

so ist auch Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$.

Aber Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \gamma\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \gamma\delta$,

und Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$,

mithin Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \gamma\delta$,
= Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\beta\delta \, . \, \delta\gamma$,

daher Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ um das Rechteck $\beta\delta \, . \, \delta\gamma$ grösser als Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$.

Ein singulärer Satz des dritten Problems. [*Command. LXIV.*] In Bezug auf die drei gegebenen Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ ist, falls Rechteck $\alpha\beta \, . \, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \gamma\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$, das Verhältniss von Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \varepsilon\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon \, . \, \varepsilon\gamma$ ein singuläres und grösstes; ich behaupte nun, dass dasselbe auch für das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\delta$ zu dem Quadrat der Linie, die besteht aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \, . \, \beta\delta$ und aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta . \gamma\delta$, stattfindet.

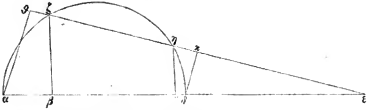
βεγ· λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν αγ,βδ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ αβ,γδ. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς αδ ἡμικύκλιον τὸ αζηδ καὶ τῇ αδ ὀρθαὶ ἤχθωσαν αἱ βζ,γη. ἐπεὶ οὖν γεγένηται ὡς τὸ ὑπὸ αβδ πρὸς τὸ ὑπὸ αγδ οὕτω τὸ ἀπὸ [βε] [1]) πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αβδ ἴσον ἐστὶν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ἀπὸ βζ, τῷ δὲ ὑπὸ αγδ ἴσον τὸ ἀπὸ γη, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ γη οὕτω τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, καὶ μήκει· καί εἰσι παράλληλοι αἱ βζ,γη. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ζ, η, ε. ἔστω ἡ ζηε, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ἤχθωσαν αἱ αϑ, δκ. ἐπεὶ οὖν μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ αεδ πρὸς τὸ ὑπὸ βεγ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ζεη [ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αεδ] [2]), ὁ ἄρα μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ὑπὸ βεγ. [ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ὑπὸ βεγ] [3]) οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ τὸ ἀπὸ ηε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αε πρὸς τὸ ἀπὸ εϑ, ἐν κύκλῳ γὰρ τὰ ϑ, α, γ, η σημεῖα, ἐπειδήπερ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς ϑ, γ σημείοις γωνίαι, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ εα πρὸς τὸ εϑ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑκ ἐν παραλλήλῳ, ὁ ἄρα μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ δα πρὸς τὸ ἀπὸ ϑκ· ἡ δὲ ϑκ ἐστὶν ἡ δυναμένη τό,τε ὑπὸ τῶν αγ,βδ καὶ τὸ ὑπὸ αβ,γδ, ὥστε ὁ μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν αβ,γδ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν αβ,γδ.

---

1) Einschaltung von *Commandin.*

2) Einschaltung von *Commandin.*

3) Einschaltung von *Commandin.*



Man beschreibe über $\alpha\delta$ den Halbkreis $\alpha\zeta\eta\delta$ und errichte auf $\alpha\delta$ die Senkrechten $\beta\zeta$, $\gamma\eta$. Da nun

Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$,

und Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$ = Quadrat über $\beta\zeta$,

Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\eta\gamma$,

so ist Quadrat über $\beta\zeta$: Quadrat uber $\eta\gamma$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\varepsilon$,

mithin $\beta\zeta : \gamma\eta = \beta\varepsilon : \gamma\varepsilon$;

auch ist $\beta\zeta \parallel \gamma\eta$, folglich ist die Linie durch die Punkte ζ, η, ε eine gerade. Man verlängere dieselbe und fälle die Senkrechten $\alpha\vartheta$, $\delta\varkappa$. Da nun das Verhältniss von Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$: Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ ein singuläres und grösstes ist, und Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\eta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$, so ist auch das Verhältniss von Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\eta$: Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ ein singuläres und grösstes; aber

Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\eta$: Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\eta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\vartheta$,

denn die Punkte ϑ, α, γ, η liegen auf der Peripherie eines Kreises, da nämlich die Winkel bei ϑ und γ rechte sind, und

Quadrat über $\alpha\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\vartheta$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\vartheta\varkappa$,

folglich ist auch das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\vartheta\varkappa$ ein singuläres und grösstes. Es besteht aber $\vartheta\varkappa$ aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$ und aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$, daher ist auch das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\delta$ zu dem Quadrat über der Linie, die besteht aus der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \beta\delta$ und der Linie, deren Quadrat = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$, ein singuläres und grösstes.

Τὸ πρῶτον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα ἕξ, ἐπιτάγματα ις, διορισμοὺς δὲ ε, ὧν μέγιστοι μὲν τέσσαρες, ἐλάχιστος δὲ εἷς· καὶ εἰσι μέγιστοι μὲν ὅ,τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πέμπτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς, ὧν ἐλάχιστοι μὲν δύο, μέγιστος δὲ εἷς· καί εἰσιν ἐλάχιστοι μὲν ὅ,τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸν τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος.

Νεύσεων πρῶτον.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα. Ἔστω μείζων ἡ αβ τῆς γδ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ γζδ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αε τῆς γζ. Καὶ τετμήσθω ἑκατέρα τῶν αβ,γδ δίχα καθ' ἑκάτερα τῶν ϑ, η σημείων· φανερὸν δὴ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ηβ τῆς ϑδ. ἐπεὶ οὖν ἴσον μέν ἐστι τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ γζδ, μεῖζον δὲ τὸ ἀπὸ ηβ τοῦ ἀπὸ ϑδ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ [ηβ, τοῦ ὑπὸ γζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ ϑδ][1]· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ ηβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ηε, τὸ δὲ ὑπὸ γζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ ϑδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζϑ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ηε τοῦ ἀπὸ ϑζ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ηε τῆς ϑζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αη τῆς γϑ μείζων· ὅλη ἄρα ἡ αε ὅλης τῆς γζ ἐστὶ μείζων. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐλάσσων ᾖ ἡ αβ τῆς γδ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ γζδ, ἐλάσσων ἔσται ὅλη ἡ αε ὅλης τῆς γζ.

Ἔστω μείζων ἡ αβ τῆς γδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ γδ κατὰ τὸ ε· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν γε,εδ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβαλεῖν. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ γεδ ἴσον τῷ ἀπὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ γε ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς

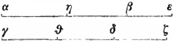
[1]) Einschaltung von *Commandin.*

Das erste Buch über den bestimmten Schnitt enthält sechs Aufgaben, sechszehn Anordnungen, fünf Determinationen, von denen vier Maxima, eine ein Minimum ist; die Maxima befinden sich in der zweiten Anordnung der zweiten Aufgabe, in der dritten Anordnung der vierten Aufgabe, in der dritten Anordnung der fünften Aufgabe und in der dritten Anordnung der sechsten Aufgabe; das Minimum in der dritten Anordnung der dritten Aufgabe. Das zweite Buch über den bestimmten Schnitt hat drei Aufgaben, neun Anordnungen, drei Determinationen, von denen zwei Minima, eine ein Maximum ist; die Minima finden sich in der dritten Anordnung der ersten Aufgabe und in der dritten Anordnung der zweiten Aufgabe, ein Maximum aber in der dritten Anordnung der dritten Aufgabe.

Ueber Neigungen.

Erstes Buch.

Lemma, für die erste Aufgabe zu gebrauchen. [*Command. LXV.*] Es sei $\alpha\beta > \gamma\delta$ und Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta \cdot \zeta\delta$, so ist $\alpha\varepsilon > \gamma\zeta$.



Wird eine jede der Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ in den Punkten η, ϑ halbirt, so ist offenbar $\eta\beta > \vartheta\delta$. Da nun Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta \cdot \zeta\delta$ und Quadrat über $\eta\beta$ > Quadrat über $\vartheta\delta$, so ist auch

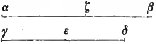
Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\eta\beta$ > Rechteck $\gamma\zeta \cdot \zeta\delta$ + Quadrat über $\vartheta\delta$;

aber Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\eta\beta$ = Quadrat über $\eta\varepsilon$,
Rechteck $\gamma\zeta \cdot \zeta\delta$ + Quadrat über $\vartheta\delta$ = Quadrat über $\zeta\vartheta$,

mithin Quadrat über $\eta\varepsilon$ > Quadrat über $\zeta\vartheta$, daher $\eta\varepsilon > \zeta\vartheta$. Es ist aber $\alpha\eta > \gamma\vartheta$, folglich $\alpha\varepsilon > \gamma\zeta$.

Auf ähnliche Weise ist, wenn $\alpha\beta < \gamma\delta$ und Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta \cdot \zeta\delta$, $\alpha\varepsilon < \gamma\zeta$.

Es sei $\alpha\beta > \gamma\delta$, und $\gamma\delta$ werde im [*Command. LXVI.*] Punkte ε halbirt. Offenbar kann man an die Linie $\alpha\beta$ ein dem Rechteck $\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ gleiches anfügen, denn Rechteck $\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\delta$ = Qua-



ἡμισείας τῆς αβ. παραβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζβ, καὶ ἔστω μείζων ἡ αζ τῆς ζβ· πάλιν δὴ φανερὸν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αζ τῆς γε, ἐλάσσων δὲ ἡ βζ τῆς εδ. Ἡ μὲν γὰρ αζ τῆς μείζονος μείζων ἐστὶν ἢ ἡμίσεια,) ἡ δὲ γε τῆς ἐλάσσονός ἐστιν ἡμίσεια· ὡς δὲ ἡ αζ πρὸς τὴν γε οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν ζβ. ὅπερ ἔδει: —

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσον τὸ ὑπὸ αζβ τῷ ὑπὸ γεδ, καὶ ἐλάσσων ἡ αβ τῆς γδ. καὶ ὅτι ἐλάσσων μὲν ἡ δε τῆς εγ, ἔστι δὲ ἡ βζ τῆς ζα· ὅτι καὶ ἡ αζ τῆς γε ἐλάσσων ἐστίν. Τετμήσθωσαν δὲ δίχα αἱ γδ.αβ κατὰ τὰ η, ϑ σημεῖα· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αϑ τῆς γη. ἔστω, καὶ τὸ ἀπὸ αϑ τοῦ ἀπὸ τῆς γη ἐστὶν ἔλασσον. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αϑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν αζβ καὶ τῷ ἀπὸ ζϑ, τὸ δὲ ἀπὸ γη ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ γεδ καὶ τῷ ἀπὸ ηε, καὶ τὸ ὑπὸ αζβ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ζϑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ ηε· ὧν τὸ ὑπὸ αζβ ὑπόκειται τῷ ὑπὸ γεδ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ϑζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ηε· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ϑζ τῆς ηε. ἦν δὲ καὶ ἡ αϑ τῆς γη ἐλάσσων· ὅλη ἄρα ἡ αζ ὅλης τῆς γε ἐστὶν ἐλάσσων, ἡ δὲ λοιπὴ τῆς λοιπῆς μείζων.

Ἔστω δὴ πάλιν μείζων ἡ αβ τῆς γδ, καὶ τετμήσθω ἡ γδ κατὰ τὸ ε, ὥστε τὴν δε τῆς εγ μὴ εἶναι ἐλάσσονα· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι [δυνατόν][2]) ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν γεδ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβαλεῖν ἐλλεῖπον τετράγωνον. ἐπεὶ γὰρ οὐκ ἔστιν ἐλάσσων ἡ δε τῆς εγ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ μείζων· καὶ εἰ μὲν ἴση, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ γεδ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γδ, ὥστε ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, εἰ δὲ μείζων, πολλῷ ἔλασσόν ἐστι τὸ ὑπὸ γεδ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, καὶ γὰρ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γδ ἐστὶν ἔλασσον. δυνατὸν[3]) ἄρα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γεδ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβαλεῖν ἐλλεῖπον τετράγωνον. παραβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ

---

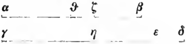
[1]) So emendirt *Commandin* diese Stelle, die Hdsch. haben *τῆς μείζονός ἐστιν ἡμίσεια.*

[2]) Einschaltung von *Commandin.*

[3]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben *δὲ.*

drat über $\gamma\varepsilon$, und das Quadrat über $\gamma\varepsilon$ ist kleiner als das Quadrat über der Hälfte von $\alpha\beta$. Es sei dasselbe angefügt, nämlich das Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$, und $\alpha\zeta$ sei grösser als $\zeta\beta$, so ist offenbar wiederum $\alpha\zeta > \gamma\varepsilon$ und $\beta\zeta < \varepsilon\delta$. Denn $\alpha\zeta$ ist grösser als die Hälfte der grösseren, und $\gamma\varepsilon$ die Hälfte der kleineren Linie; es ist aber $\alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \varepsilon\delta : \zeta\beta$.

Es sei wiederum Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta =$ [*Command. LXVII.*] Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$, und $\alpha\beta < \gamma\delta$; es sei ferner $\delta\varepsilon < \varepsilon\gamma$ und $\beta\zeta < \zeta\alpha$, so ist auch $\alpha\zeta < \gamma\varepsilon$.



Halbirt man $\gamma\delta$, $\alpha\beta$ in den Punkten η, ϑ, so ist $\alpha\vartheta < \gamma\eta$, und Quadrat über $\alpha\vartheta <$ Quadrat über $\gamma\eta$. Aber

Quadrat über $\alpha\vartheta =$ Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta +$ Quadrat über $\zeta\vartheta$,
und Quadrat über $\gamma\eta =$ Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta +$ Quadrat über $\eta\varepsilon$,
mithin Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta +$ Quadrat über $\zeta\vartheta <$ Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$
$+$ Quadrat über $\eta\varepsilon$;

nun ist Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta =$ Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$, folglich Quadrat über $\zeta\vartheta <$ Quadrat über $\eta\varepsilon$, mithin auch $\zeta\vartheta < \eta\varepsilon$. Es war aber $\alpha\vartheta < \gamma\eta$, folglich $\alpha\zeta < \gamma\varepsilon$; der Rest aber von jener ist grösser als der Rest von dieser.

Es sei wiederum $\alpha\beta > \gamma\delta$, und man [*Command. LXVIII.*] theile $\gamma\delta$ im Punkte ε, so dass $\delta\varepsilon$ nicht kleiner ist als $\varepsilon\gamma$, so ist offenbar möglich, der Linie $\alpha\beta$ ein dem Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ gleiches anzufügen, das kleiner ist, als ein Quadrat. Da nämlich $\delta\varepsilon$ nicht $< \varepsilon\gamma$, so ist $\delta\varepsilon$ entweder gleich oder grösser als $\varepsilon\gamma$; wenn sie



gleich ist, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ gleich dem Quadrat über der Hälfte von $\gamma\delta$, mithin kleiner als das Quadrat über der Hälfte von $\alpha\beta$; ist sie grösser, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ um vieles kleiner als das Quadrat über der Hälfte von $\alpha\beta$, denn es ist auch kleiner als das Quadrat über der Hälfte von $\gamma\delta$. Es ist also möglich, ein dem Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ gleiches der Linie $\alpha\beta$ anzufügen, das kleiner ist als ein Quadrat. Es sei dasselbe angefügt, nämlich das Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$, und es sei $\alpha\zeta$ der grössere Abschnitt, so ist $\zeta\beta < \gamma\varepsilon$. Da nämlich $\delta\varepsilon$ nicht $< \varepsilon\gamma$, so ist sie entweder gleich oder grösser,

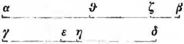
τῶν αζβ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ αζ· ὅτι δὴ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ζβ τῆς γε. Ἐπεὶ γὰρ ἡ δε τῆς εγ οὐκ ἔστιν ἐλάσσων, ἤτοι ἄρα ἐστὶν ἴση ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση ἡ δε τῇ εγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ μείζων ἢ ἡμίσεια ἡ αζ, τῆς δὲ γδ ἡμίσεια ἡ δε· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῆς δε. καὶ ἔστιν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν ζβ· μείζων ἄρα ἡ γε τῆς ζβ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ζβ τῆς γε. ἔστω δὲ μείζων ἡ δε τῆς εγ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ γδ κατὰ τὸ η σημεῖον, ἡ δὲ αβ δίχα κατὰ τὸ ϑ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αβ της γδ, καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια[1] ἡ ϑβ, τῆς δὲ γδ ἡμίσεια[1] ἡ γη· μείζων ἄρα ἡ ϑβ τῆς γη, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ϑβ τοῦ ἀπὸ γη μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ϑβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αζβ καὶ τῷ ἀπὸ ζϑ, τὸ δὲ ἀπὸ γη ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν γεδ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζβ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζϑ τοῦ ὑπὸ γεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εη. ὧν τὸ ὑπὸ αζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γεδ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ϑζ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ εη, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ϑζ τῆς εη. ἔστι δὲ καὶ ἡ αϑ τῆς δη μείζων, ὅλη ἄρα ἡ αζ ὅλης τῆς δε μείζων ἐστίν. καὶ ἔστιν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν ζβ· μείζων ἄρα καὶ ἡ γε τῆς ζβ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ζβ τῆς γε. ὅπερ: —

Εἰς τὸ ἕκτον πρόβλημα. Ἔστω ἐλάσσων μὲν ἡ αβ τῆς γδ, ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αεβ τῷ ὑπὸ γζδ· ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αε τῆς γζ. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ αβ, γδ κατὰ τὰ ϑ, η σημεῖα· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ϑβ τῆς ηδ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ γζδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αεβ, τὸ δὲ ἀπὸ ϑβ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ηδ, τὸ ἄρα ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ ϑβ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ϑε, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ ηδ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ηζ· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶ ἡ εϑ τῆς ηζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αϑ τῆς γη ἐλάσσων· ὅλη ἄρα ἡ αε ὅλης τῆς γζ ἐστὶν ἐλάσσων. ὁμοίως κἂν μείζων ᾖ, ἡ ὅλη τῆς ὅλης.

Παραθεωρούμενον ἐν τῷ ὀγδόῳ προβλήματι. Ῥόμβου ὄντος τοῦ αδ, οὗ διάμετρος ἡ βγε, ἐὰν τῶν βε, εγ μέση ἀνά-

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben ἄρα.

Es sei zuerst $\delta\varepsilon = \varepsilon\gamma$. Da $\alpha\beta > \gamma\delta$ und $\alpha\zeta$ grösser als die Hälfte von $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$ aber die Hälfte von $\gamma\delta$ ist, so ist $\alpha\zeta > \delta\varepsilon$; nun ist $\alpha\zeta : \delta\varepsilon = \gamma\varepsilon : \zeta\beta$, folglich $\gamma\varepsilon > \zeta\beta$, mithin $\zeta\beta < \gamma\varepsilon$. Es sei nun $\delta\varepsilon > \varepsilon\gamma$, so halbire man $\gamma\delta$ im Punkte η, $\alpha\beta$ im Punkte ϑ. Da



$\alpha\beta > \gamma\delta$ und $\vartheta\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\gamma\eta = \frac{1}{2}\gamma\delta$, so ist $\vartheta\beta > \gamma\eta$ und Quadrat über $\vartheta\beta$ > Quadrat über $\gamma\eta$ Aber

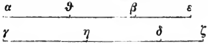
Quadrat über $\vartheta\beta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\beta$ + Quadrat über $\zeta\vartheta$,

Quadrat über $\gamma\eta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\eta$,

mithin Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\beta$ + Quadrat über $\zeta\vartheta$ > Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\eta$;

nun ist Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\beta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon . \varepsilon\delta$,
folglich Quadrat über $\zeta\vartheta$ > Quadrat über $\varepsilon\eta$
und $\zeta\vartheta > \varepsilon\eta$.
Es ist auch $\alpha\vartheta > \delta\eta$,
daher $\alpha\zeta > \delta\varepsilon$;
da nun $\alpha\zeta : \delta\varepsilon = \gamma\varepsilon : \zeta\beta$,
so ist $\gamma\varepsilon > \zeta\beta$, mithin $\zeta\beta < \gamma\varepsilon$, was zu beweisen war.

Zur sechsten Aufgabe. Es sei $\alpha\beta < \gamma\delta$, [*Command. LXIX.*] und Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\delta$, so ist $\alpha\varepsilon < \gamma\zeta$.



Man halbire $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ in den Punkten ϑ, η, so ist $\vartheta\beta < \eta\delta$. Da nun Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$, aber Quadrat über $\vartheta\beta$ < Quadrat über $\eta\delta$, so ist auch Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\vartheta\beta$ (= Quadrat über $\vartheta\varepsilon$) < Rechteck $\gamma\zeta . \zeta\delta$ + Quadrat über $\eta\delta$ (= Quadrat über $\eta\zeta$), mithin $\varepsilon\vartheta < \eta\zeta$. Es ist aber $\alpha\vartheta < \gamma\eta$, folglich $\alpha\varepsilon < \gamma\zeta$. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass wenn $\alpha\beta > \gamma\delta$, auch $\alpha\varepsilon > \gamma\zeta$.

Bei der achten Aufgabe zu vergleichen [*Command. LXX.*] Wenn $\alpha\delta$ ein Rhombus, dessen Diagonale $\beta\gamma\varepsilon$, und wenn $\varepsilon\zeta$ die mittlere Proportionale zu $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$ ist; wenn ferner um ε als Mittelpunkt mit dem Radius $\varepsilon\zeta$ der Kreis $\zeta\eta\vartheta$ beschrieben und $\lambda\gamma$

λογον ληφθῇ ἡ εζ,[1] καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ κύκλος γραφῇ ὁ ζηθ, καὶ ἐκβληθῇ ἡ λγη· ἔσται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν η, κ, β. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ λε, εκ, βκ, κη, [εη].[2] ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ λγζ γωνία τῇ ὑπὸ ζγκ γωνίᾳ, καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου εἰσίν, αἱ λγ, γκ ἴσαι εἰσίν· λῆμμα γάρ. ἀλλὰ καὶ ἡ λε τῇ εκ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ γλε γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γκε ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ γλε ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γηε, καὶ ἡ ὑπὸ γηε ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γκε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γκε τῇ ὑπὸ γβκ, καὶ ἡ ὑπὸ γβκ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γηε. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ηγε τῇ ὑπὸ βγκ ἴση ἐστί, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεη λοιπῇ τῇ ὑπὸ γκβ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ γεη μετὰ τῆς γκη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ ἡ ὑπὸ γκβ ἄρα μετὰ τῆς ὑπὸ γκη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὥστε εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν β, κ, η σημείων.

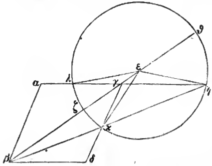
Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ ἐπὶ τετράγωνον πρόβλημα, ποιοῦν τὰ αὐτὰ τῷ ῥόμβῳ. Ἔστω τετράγωνον τὸ αδ, καὶ ἤχθω ἡ βηε, καὶ αὐτῇ ὀρθὴ ἤχθω ἡ εζ· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν γδ, ηε τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ τετραγώνῳ. Ἤχθω διὰ τοῦ ε τῇ γδ παράλληλος ἡ εθ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γεθ γωνία· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζεη γωνία ὀρθή, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γεη γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ δβη γωνία τῇ ὑπὸ ζεθ γωνίᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζθε γωνία ὀρθῇ τῇ ὑπὸ βδη ἴση, καὶ ἔστιν ἴση ἡ εθ τῇ βδ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εζ τῇ ηδ· ἐπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βζ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βε, εζ τετραγώνοις, ὧν τὸ ὑπὸ ζβδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εβη, ἐν κύκλῳ γάρ ἐστι τὰ δ, ζ, ε, η σημεῖα, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ βζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βεη καὶ τῷ ἀπὸ εζ τετραγώνῳ, τουτέστι καὶ τῷ ἀπὸ βη τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ βεη μετὰ τοῦ ἀπὸ βη τετραγώνου [ἴσον ἐστὶ] τὸ ὑπὸ εβη μετὰ τοῦ ἀπὸ εη· τὸ ἄρα ὑπὸ βζδ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ εβη, τουτέστιν ὑπὸ ζβδ, καὶ τῷ ἀπὸ ηε. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ βδζ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ζδ ἴσον ἐστὶ

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben βζ.

[2]) Einschaltung von *Horsley*.

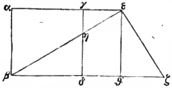
bis η verlängert wird, so ist die Linie, die durch die Punkte η $\varkappa$, β geht, eine gerade.

Man ziehe $\lambda\varepsilon$, $\varkappa\varepsilon$, $\beta\varkappa$, $\varkappa\eta$, $\varepsilon\eta$. Da $\angle\lambda\gamma\zeta = \angle\zeta\gamma\varkappa$ und diese Winkel auf beiden Seiten des Durchmessers des Kreises liegen, so ist $\lambda\gamma = \gamma\varkappa$, wie in einem Lemma gezeigt ist. Aber $\lambda\varepsilon = \varepsilon\varkappa$, mithin $\angle\gamma\lambda\varepsilon = \angle\gamma\varkappa\varepsilon$. Nun ist $\angle\gamma\lambda\varepsilon = \angle\gamma\eta\varepsilon$, mithin $\angle\gamma\varkappa\varepsilon = \angle\gamma\eta\varepsilon$. Es ist aber $\angle\gamma\varkappa\varepsilon = \angle\gamma\beta\varkappa$, daher $\angle\gamma\beta\varkappa = \angle\gamma\eta\varepsilon$.



Ferner ist $\angle\eta\gamma\varepsilon = \angle\beta\gamma\varkappa$, folglich $\angle\gamma\varepsilon\eta = \angle\gamma\varkappa\beta$. Nun ist aber $\angle\gamma\varepsilon\eta + \angle\gamma\varkappa\eta = 2\,\mathrm{R}$, mithin auch $\angle\gamma\varkappa\beta + \angle\gamma\varkappa\eta = 2\,\mathrm{R}$, daher ist die durch die Punkte β, $\varkappa$, η gehende Linie eine gerade.

Ein Lemma für die Aufgabe in Betreff [*Command. LXXI.*] eines Quadrats zu gebrauchen; dasselbe gilt auch für den Rhombus. Zieht man in dem Quadrat $\alpha\delta$ die Linie $\beta\eta\varepsilon$ und auf ihr die Senkrechte $\varepsilon\zeta$, so ist Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\eta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\zeta$.



Zieht man durch ε $\varepsilon\vartheta \parallel \gamma\delta$, so ist $\angle\gamma\varepsilon\delta = \mathrm{R}$, aber $\angle\zeta\varepsilon\eta = \mathrm{R}$, daher $\angle\gamma\varepsilon\eta$ d. h. $\angle\delta\beta\eta = \angle\zeta\varepsilon\vartheta$. Es ist aber auch $\angle\zeta\vartheta\varepsilon = \angle\beta\delta\eta = \mathrm{R}$, und $\varepsilon\vartheta = \beta\delta$, folglich $\varepsilon\zeta = \eta\beta$.

Da nun Quadrat über $\beta\zeta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$, und Rechteck $\zeta\beta\,.\,\beta\delta$ = Rechteck $\varepsilon\beta\,.\,\beta\eta$,
(es liegen nämlich die Punkte δ, ζ, ε, η auf der Peripherie eines Kreises),
so ist als Differenz Rechteck $\beta\zeta\,.\,\zeta\delta$ = Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\eta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\eta$ + Quadrat über $\beta\eta$.
Aber Rechteck $\beta\varepsilon\,.\,\varepsilon\eta$ + Quadrat über $\beta\eta$ = Rechteck $\varepsilon\eta\,.\,\beta\eta$ + Quadrat über $\varepsilon\eta$,
mithin Rechteck $\beta\zeta\,.\,\zeta\delta$ = Rechteck $\varepsilon\beta\,.\,\beta\eta$ (d. h. Rechteck $\zeta\beta\,.\,\beta\delta$) + Quadrat über $\varepsilon\eta$.

τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, ηε, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, ηε τετραγώνοις.

Πρόβλημα ὡς Ἡράκλειτος. Τετραγώνου ὄντος τοῦ αδ, ἐκβάλλειν αγ ἐπὶ τὸ ε καὶ ποιεῖν δοθεῖσαν τὴν εζ νεύουσαν ἐπὶ τὸ β.[1]) Γεγονέτω, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου τῇ βε ὀρθογώνιος εὐθεῖα ἤχθω ἡ εη. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ τῶν γδ, ζε τετράγωνα [ἴσα][2]) ἐστὶ τῷ ἀπὸ δη τετραγώνῳ, δοθέντα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν γδ, ζε, δοθέντα γὰρ ἑκάτερα τῷ μεγέθει, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ δη· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ δη τῷ μεγέθει. καὶ ὅλη ἄρα ἡ βη δέδοται τῷ μεγέθει· ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. δέδοται ἄρα τῇ θέσει τὸ ἐπεὶ τῆς βη ἡμικύκλιον καὶ ἔρχεται διὰ τοῦ ε. τὸ ε ἄρα θέσει περιφερείας ἅπτεται, ἀλλὰ καὶ θέσει εὐθείας τῆς αε· δοθὲν[3]) ἄρα ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὸ β ἐστὶ δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ βε. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω τὸ μὲν τετράγωνον τὸ αδ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ θ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, θ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ηδ τῆς δγ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ηδ,δβ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ δγ. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς βη ἡμικύκλιον γραφόμενον ὑπερπεσεῖται τὸ γ σημεῖον. γεγράφθω καὶ ἔστω τὸ βκεη, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εη. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γδ, εζ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ηδ τετραγώνῳ, τῷ δὲ ἀπὸ δη ἴσα ἐτέθη τὰ ἀπὸ τῶν γδ, θ τετράγωνα, ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν γδ, θ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, εζ, ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ θ τῷ ἀπὸ εζ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θ τῇ εζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ εζ· ἡ εζ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνη· διήχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ βλ. εἰ δὴ καὶ ἡ βλ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, ἔσται ἴση ἡ νλ τῇ εζ· μείζων δὲ ἡ ζβ τῆς νβ, ὅλη ἄρα ἡ βλ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς βε, ὅπερ ἄτοπον· ἔστι γὰρ μείζων. οὐκ ἄρα ἡ βλ ποιεῖ τὸ πρόβλημα· ἡ βε ἄρα μόνη. ἵνα δὲ καὶ ἐπιγνῶμεν, ποτέρα τῶν νλ, ζε μείζων, δείξομεν οὕτως· ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν λβ τῆς βε, ἡ δὲ βζ τῆς βν, λοιπὴ ἄρα ἡ νλ τῆς ζε μείζων ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι αἰεὶ ἡ ἔγγιστα τοῦ γ σημείου τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων.

---

1) So emendirt *Commandin* diese Stelle; die Hdsch. haben: τετραγώνου ὄντος θέσει τοῦ αδθ εἶναι δοθεῖσαν etc.

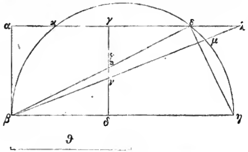
2) Einschaltung von *Commandin*

3) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben δοθεῖσα

Wird nun das gemeinsame Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\zeta$ subtrahirt, so ist

Quadrat über $\delta\zeta$ = Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\eta$
= Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\eta$.

Eine Aufgabe nach Heraklitus. Die [*Commmand. LXXII*] Seite $\alpha\gamma$ des Quadrats $\alpha\delta$ bis zum Punkte ε zu verlängern, so dass die gegebene Linie $\varepsilon\zeta$ verlängert den Punkt β trifft.



Es sei geschehen. Man ziehe vom Pkte. ε auf $\beta\varepsilon$ rechtwinklig die Gerade $\varepsilon\eta$. Da nun Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\eta$ und die Quadrate über $\gamma\delta$ und über $\zeta\varepsilon$ gegeben sind, denn ein jedes ist der Grösse nach gegeben, so ist auch Quadrat über $\delta\eta$ gegeben, mithin ist $\delta\eta$ der Grösse nach gegeben, daher die ganze Linie $\beta\eta$ der Grösse nach gegeben. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben. Mithin ist der über $\beta\eta$ beschriebene Halbkreis der Lage nach gegeben und geht durch den Punkt ε. Der Punkt ε liegt also auf der Peripherie; aber er liegt auch auf der der Lage nach gegebenen Geraden $\alpha\varepsilon$, ist also gegeben. Ferner ist der Punkt β gegeben, folglich ist $\beta\varepsilon$ der Lage nach gegeben.

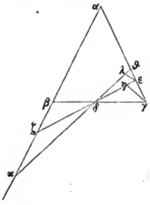
Synthesis. Es sei $\alpha\delta$ das Quadrat, ϑ die gegebene Gerade; es sei ferner Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über ϑ = Quadrat über $\delta\eta$, so ist $\eta\delta > \delta\gamma$, daher Rechteck $\eta\delta \,.\, \delta\beta >$ Quadrat über $\delta\gamma$; mithin wird der über $\beta\eta$ beschriebene Halbkreis über den Punkt γ hinausgehen. Wird nun der Halbkreis $\beta\varkappa\varepsilon\eta$ beschrieben, $\alpha\gamma$ bis zum Punkt ε verlängert und $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\eta$ gezogen, so ist Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Quadrat über $\eta\delta$, aber nach der Annahme ist Quadrat über $\delta\eta$ = Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über ϑ, mithin Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über ϑ = Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$, folglich Quadrat über ϑ = Quadrat über $\varepsilon\zeta$, und $\vartheta = \varepsilon\zeta$. Es ist mithin $\varepsilon\zeta$ gegeben, folglich löst $\varepsilon\zeta$ die Aufgabe. Ich behaupte nun, dass sie allein die Aufgabe löst. Zieht man nämlich irgend eine andere Linie $\beta\lambda$, so wird, wenn auch diese letztere die Aufgabe löst, $\nu\lambda = \nu\zeta$ sein; es ist aber $\zeta\beta >$

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸν τοῦ $\overline{\Theta}$ θεωρήματος διορισμόν, ὡς ἐν τοῖς ἀρχαίοις. Ἔστω ἴση ἡ βα τῇ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ δ σημεῖον· ὅτι ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ βγ πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ σημείου διαγομένων εὐθειῶν. Διήχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ εζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ ἐπὶ τὸ ζ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ εζ τῆς γβ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τουτέστιν ἡ γ, τῆς βζε, δυνατόν ἐστι τῇ ὑπὸ βζε ἴσην ἀπὸ τῆς γ ἀφελεῖν· ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ δγη γωνία. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δη, μείζων δὲ ἡ ζδ τῆς δβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γδ τῆς δη. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ζδ τῆς δβ, τουτέστι τῆς δγ, ἀλλὰ ἡ δγ τῆς δη μείζων ἐστίν· ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζδ, δβ, δγ, δη, καὶ ἔστι μεγίστη μὲν ἡ ζδ, ἐλαχίστη δὲ ἡ δη, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ζη τῆς βγ, ὥστε ἡ βγ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ζη· πολλῷ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς εζ. ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ διαγομένων εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ βγ· ἡ βγ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ διαγομένων εὐθειῶν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ἔγγιστα αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν. διήχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ θκ, καὶ τῇ κ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ δελ· δυνατὸν γάρ. πάλιν δὴ μείζων ἡ μὲν κδ τῆς ζδ, ἡ δὲ εδ τῆς δλ, ὥστε ὅλη ἡ κλ μείζων ἐστὶ τῆς εζ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ θκ τῆς εζ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ εζ τῆς θκ. ἐλάσσων μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ βγ πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ διαγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ἔγγιστα αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων.

Τούτου ὄντος, φανερὸς ὁ διορισμός. ἐὰν γὰρ ἐκθώμεθα τὸν ῥόμβον τὸν αβγδ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν αδ ἀγάγω αὐτῇ ὀρθὴν τὴν εζ συμπίπτουσαν ταῖς αγ, αβ κατὰ τὰ ε, ζ, δεῖ με

$\nu\beta$, mithin $\beta\lambda < \beta\varepsilon$, was ungereimt ist, denn es ist $\beta\lambda > \beta\varepsilon$. Daher löst $\beta\lambda$ die Aufgabe nicht, sondern nur allein $\beta\varepsilon$. Welche von den beiden Linien $\nu\lambda$, $\zeta\varepsilon$ die grössere ist, wird auf folgende Weise dargethan. Da $\beta\lambda > \beta\varepsilon$ und $\beta\zeta > \beta\nu$, so ist $\nu\lambda > \zeta\varepsilon$. Offenbar ist auch die dem Punkt γ nähere Linie kleiner als die entferntere.

Ein Lemma zur Determination des [*Command. LXXIII.*] neunten Theorems zu gebrauchen, wie es bei den Alten gefunden wird. Es sei $\alpha\beta = \alpha\gamma$, und es werde $\beta\gamma$ im Punkte δ halbirt, so ist unter allen Geraden die durch den Punkt δ gezogen werden, $\beta\gamma$ die kleinste.



Zieht man durch den Punkt δ irgend eine andere Gerade $\varepsilon\zeta$ und verlängert $\alpha\beta$ bis ζ, so soll $\varepsilon\zeta > \gamma\beta$ sein. Da $\angle\, \alpha\beta\gamma\ (= \angle\, \gamma) > \angle\, \beta\zeta\varepsilon$, so kann man von $\angle\, \gamma$ einen Theil wegnehmen, der $\angle\, \beta\zeta\varepsilon$ gleich ist. Es sei dies $\angle\, \delta\gamma\eta$. Nun ist $\zeta\delta : \delta\beta = \gamma\delta : \delta\eta$, aber $\zeta\delta > \delta\beta$, folglich $\gamma\delta > \delta\eta$. Da nun $\zeta\delta > \delta\beta$ d. h $> \delta\gamma$ und $\delta\gamma > \delta\eta$, da ferner die vier Linien $\zeta\delta$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\eta$ proportional sind, und $\zeta\delta$ die grösste, $\delta\eta$ die kleinste ist, so ist $\zeta\eta > \beta\gamma$, mithin $\beta\gamma < \zeta\eta$, und daher um vieles kleiner als $\varepsilon\zeta$. Auf gleiche Weise wird dargethan, dass auch $\beta\gamma$ kleiner ist als alle andern durch den Punkt δ gezogene Geraden. Demnach ist $\beta\gamma$ kleiner als alle durch den Punkt δ gezogene Geraden. Ich behaupte nun, dass auch die $\beta\gamma$ nähere kleiner ist als die entferntere. Zieht man nämlich irgend eine andere $\vartheta\varkappa$ durch den Punkt δ und ist $\angle\, \varkappa = \angle\, \delta\varepsilon\lambda$, was möglich ist, so ist wiederum $\varkappa\delta > \zeta\delta$ und $\varepsilon\delta > \delta\lambda$, mithin $\varkappa\lambda > \varepsilon\zeta$, folglich $\vartheta\varkappa$ um vieles grösser als $\varepsilon\zeta$, daher $\varepsilon\zeta < \vartheta\varkappa$. Demnach ist $\beta\gamma$ kleiner als alle durch den Punkt δ gezogene Linien, und die ihr nähere kleiner als die entferntere.

Nachdem dies vorausgeschickt, hat [*Command. LXXIV.*] die Determination keine Schwierigkeit. Zieht man nämlich in dem Rhombus $\alpha\beta\gamma\delta$ die Linie $\alpha\delta$ und auf ihr senkrecht die Linie $\varepsilon\zeta$,

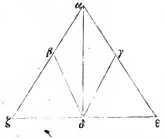
διορίζεσθαι πότερον μεγίστη ἐστὶν ἢ ἐλάσσων πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ διαγομένων εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ αδ, καὶ τῇ αδ ὀρθὴ ἡ εζ, γένονέ μοι ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ εαζ, ἴσην ἔχον τὴν εα τῇ αζ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα γίνεται ἡ εζ ἐλάσσων πασῶν τῶν διὰ τοῦ δ διαγομένων εὐθειῶν, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων.

Νεύσεων δεύτερον.

Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς αβ, διήχθω τυχοῦσα ἡ δε, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι αἱ αδ, βε· [ὅτι] ἴση ἐστὶν ἡ δζ τῇ ηε. Εἰλήφθω τὸ [κέντρον τὸ θ καὶ] [1]) ἐπὶ τὴν δε κάθετος ἤχθω ἡ θκ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ ταῖς αδ, βε, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ζκ τῇ κη. ἐπεὶ δὲ τρεῖς εἰσι παράλληλοι αἱ αδ, θκ, βε, καὶ ἔστιν ἴση ἡ αθ τῆς θβ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δκ τῇ κε, ὧν ἡ ζκ τῇ κη ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δζ λοιπῇ τῇ ηε ἐστὶν ἴση. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ἡ δη τῇ εζ ἴση ἐστίν.

Ἔστω πάλιν ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς αβ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ γδ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν αἱ αε, βζ· ὅτι πάλιν ἴση ἡ εδ τῇ δζ. Ἔστω τὸ κέντρον τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη· παράλληλος ἄρα ἐστὶ ταῖς αε, βζ, γίνονται γὰρ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ δ γωνίαι. ἐπεὶ οὖν τρεῖς παράλληλοι αἱ αε, ηδ, βζ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ αη τῇ ηβ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εδ τῇ δζ. ὅπερ: —

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

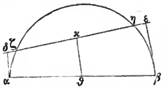


welche die verlängerten $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ in den Punkten ε, ζ schneidet, so soll bestimmt werden, ob sie die grösste oder ob sie kleiner ist als alle durch den Punkt δ gezogene Geraden. Da $\alpha\delta$ eine Diagonale ist und $\varepsilon\zeta$ auf ihr senkrecht steht, so ist $\triangle\,\varepsilon\alpha\zeta$ gleichschenklig, indem $\varepsilon\alpha = \alpha\zeta$. Nach dem vorausgegangenen Lemma ist demnach $\varepsilon\zeta$ kleiner als alle durch den Punkt δ gezogene Linien, und die ihr nähere immer kleiner als die entferntere.

Ueber Neigungen.

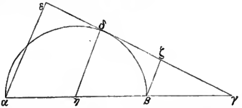
Zweites Buch.

Zieht man durch den Halbkreis über $\alpha\beta$ die beliebige Gerade $\delta\varepsilon$, und fällt darauf die Senkrechten $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, so ist $\delta\zeta = \eta\varepsilon$. [*Command. LXXV.*]



Wird von dem Mittelpunkt ϑ auf $\delta\varepsilon$ die Senkrechte $\vartheta\varkappa$ gefällt, so ist $\vartheta\varkappa \parallel \alpha\delta \parallel \beta\varepsilon$, und $\zeta\varkappa = \varkappa\eta$. Da nun die drei Linien $\alpha\delta$, $\vartheta\varkappa$, $\beta\varepsilon$ parallel sind und $\alpha\vartheta = \vartheta\beta$, so ist $\delta\varkappa = \varkappa\varepsilon$; hiervon ist $\zeta\varkappa = \varkappa\eta$, mithin $\delta\zeta = \eta\varepsilon$. Offenbar ist auch $\delta\eta = \varepsilon\zeta$.

Es sei an den Halbkreis über $\alpha\beta$ die Tangente $\gamma\delta$ gezogen und auf die letztere die Senk echten $\alpha\varepsilon$, $\beta\zeta$ gefällt, so ist wiederum $\varepsilon\delta = \delta\zeta$. [*Command. LXXVI.*]



Man verbinde d Mittelpunkt η it δ, so ist $\eta\delta \parallel \alpha\varepsilon \parallel \beta\zeta$, denn die Winkel bei δ sind rechte. Da nun die drei Linien $\alpha\varepsilon$, $\eta\delta$, $\beta\zeta$ parallel sind und $\alpha\eta = \eta\beta$, so ist auch $\varepsilon\delta = \delta\zeta$, was zu beweisen war.

Εἰς τὸ πέμπτον πρόβλημα. Ἔστω δύο ἡμικύκλια ἐπὶ τῆς αγ τὰ αβγ, δεζ. καὶ ἔστω ἴση ἡ αδ τῇ γζ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ διήχθω ἡ βγ· ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ βε τῇ ηγ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ γζ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὰ ἡμικύκλια, εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῶν ἡμικυκλίων τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὴν ηε κάθετος ἤχθω ἡ θκ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εκ τῇ κη. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ αβ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ αβ, θκ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ αθ τῇ θγ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βκ τῇ κγ, ὧν ἡ εκ τῇ κη ἴση ἐστί, λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ ηγ ἐστὶν ἴση· φανερὸν δὴ ὅτι καὶ ἡ βη τῇ εγ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

Ἔστω δὴ πάλιν τὰ αβγ, δεζ ἡμικύκλια, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἤχθω ἐφαπτομένη τοῦ δεζ ἡ γε καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εγ, ἴσης οὔσης τῆς αδ τῇ ζγ. Φανερὸν ὅτι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον εἰσὶ τὰ ἡμικύκλια· εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τῶν ἡμικυκλίων τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, αβ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ ε γωνίᾳ, ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ β, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ εη, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ αη τῇ γη, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βε τῇ εγ. ὅπερ: —

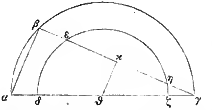
Εἰς τὸ ἕβδομον. Ἔστω πάλιν τὰ αβγ, δεζ ἡμικύκλια, καὶ ἔστω ἴση ἡ αδ τῇ ζγ, καὶ προσαναπεπληρώσθω[1]) ὁ μείζων κύκλος, καὶ διὰ τοῦ ζ ἤχθω τις ἡ βη· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ ζη. Ἔστω τὸ κέντρον τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὴν βη κάθετος ἤχθω ἡ θκ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βκ τῇ κη. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ εδ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ δε, θκ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ δθ τῇ θζ, ἴση ἄρα[2]) ἐστὶ καὶ ἡ εκ τῇ κζ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βκ ὅλῃ τῇ κη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ ζη ἴση ἐστίν. ὅπερ: — φανερὸν ὅτι καὶ ἡ βζ τῇ εη ἴση ἐστίν.

---

[1]) Die Hdsch. haben προσαναγεγραμμένος.

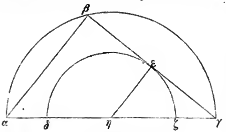
[2]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben ὅλη γάρ.

Zur fünften Aufgabe. Sind über $\alpha\gamma$ [*Command. LXXVII.*] die beiden Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ beschrieben, und ist $\alpha\delta = \gamma\zeta$, und zieht man von γ die Linie $\beta\gamma$, so ist $\beta\varepsilon = \eta\gamma$.



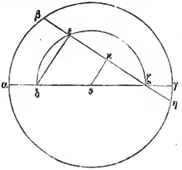
Da nämlich $\alpha\delta = \gamma\zeta$, so sind die beiden Halbkreise um denselben Mittelpunkt ϑ beschrieben. Es sei von ϑ auf $\eta\varepsilon$ die Senkrechte $\vartheta\varkappa$ gefällt, so ist $\varepsilon\varkappa = \varkappa\eta$. Zieht man nun $\alpha\beta$, so ist $\alpha\beta \parallel \vartheta\varkappa$, und da $\alpha\vartheta = \vartheta\gamma$, so ist $\beta\varkappa = \varkappa\gamma$, folglich, weil $\varepsilon\varkappa = \varkappa\eta$, $\beta\varepsilon = \eta\gamma$. Offenbar ist auch $\beta\eta = \varepsilon\gamma$, was zu beweisen war.

Bleiben die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, [*Command. LXXVIII.*] und es sei von γ an den Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$ die Tangente $\gamma\varepsilon$ gezogen, die bis β geht, so ist, da $\alpha\delta = \zeta\gamma$, $\beta\varepsilon = \varepsilon\gamma$.



Offenbar sind die beiden Halbkreise um denselben Mittelpunkt η beschrieben. Zieht man die Linien $\eta\varepsilon$, $\alpha\beta$, so sind die Winkel bei ε und bei β rechte, mithin $\alpha\beta \parallel \varepsilon\eta$, und da $\alpha\eta = \gamma\eta$, so ist $\beta\varepsilon = \varepsilon\gamma$, was zu beweisen war.

Zur siebenten Aufgabe. Bleiben die [*Command. LXXIX.*] Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ und ist $\alpha\delta = \zeta\gamma$; wird nun der grössere Kreis vervollständigt u. durch ζ die beliebige $\beta\eta$ gezogen, so ist $\beta\varepsilon = \zeta\eta$.



Von dem Mittelpunkt ϑ sei auf $\beta\eta$ die Senkrechte $\vartheta\varkappa$ gefällt, so ist $\beta\varkappa = \varkappa\eta$. Zieht man nun $\varepsilon\delta$, so ist $\delta\varepsilon \parallel \vartheta\varkappa$, und da $\delta\vartheta = \vartheta\zeta$, so ist $\varepsilon\varkappa = \varkappa\zeta$; es ist aber $\beta\varkappa = \varkappa\eta$, mithin $\beta\varepsilon = \zeta\eta$, was zu beweisen war. Offenbar ist auch $\beta\zeta = \varepsilon\eta$.

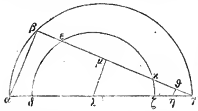
Εἰς τὸ ἔννατον. Ἔστω δύο ἡμικύκλια τὰ αβγ, δεζ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ ζη, καὶ διαχθείσης τῆς βγ ἀπὸ τοῦ η ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ κθ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν κε κάθετος ἤχθω ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αδ τῇ ζη, ἡ δὲ δλ τῇ λζ, ὅλη ἄρα ἡ αλ ὅλῃ τῇ λη ἴση ἐστί. καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ αβ, μλ, θη, ἴση ἄρα ἡ βμ τῇ μθ, ὧν ἡ εμ τῇ μκ ἴση ἐστὶ λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ κθ ἴση ἐστίν. φανερὸν δὴ ὅτι καὶ ἡ βκ τῇ εθ ἴση ἐστίν.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐφαπτέσθω[1]) ἡ βγ τοῦ δεζ ἡμικυκλίου· ὅτι πάλιν ἡ βε τῇ εθ ἴση ἐστίν. Πάλιν εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λε· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν βγ. καὶ γεγόνασι τρεῖς παράλληλοι αἱ αβ, ελ, ηθ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ αλ τῇ λη· ἴση ἄρα καὶ ἡ βε τῇ εθ. ὅπερ: —

Εἰς τὸ ὄγδοον. Ἔστω δύο ἡμικύκλια τὰ αβγ, δεζ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ αδ τῆς γζ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ γη, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ βακγ κύκλος, καὶ διήχθω ἡ τυχοῦσα ἡ βκ, καὶ ἀπὸ τοῦ η ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ θκ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν εζ κάθετος ἤχθω ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αλ τῇ λγ, ἡ δὲ αδ τῇ ηγ, λοιπὴ ἄρα ἡ δλ λοιπῇ τῇ λη ἐστὶν ἴση. καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ δε, λμ, ηθ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εμ τῇ μθ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βμ ὅλῃ τῇ μκ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ θκ ἐστὶν ἴση. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἡ θβ τῇ εκ ἴση ἐστίν.

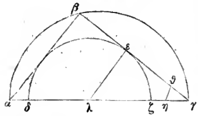
[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἐφάπτεται.

Zur neunten Aufgabe. Hat man die [*Command LXXX.*] Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, und ist $\alpha\delta = \zeta\eta$; zieht man ferner $\beta\gamma$ und fällt darauf von η die Senkrechte $\eta\vartheta$, so ist $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$.



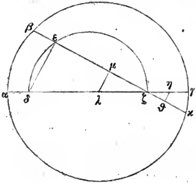
Ist λ der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$ und fällt man auf $\varkappa\varepsilon$ die Senkrechte $\lambda\mu$, so ist $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\alpha\delta = \zeta\eta$, $\delta\lambda = \lambda\zeta$, so ist $\alpha\lambda = \lambda\eta$. Es sind aber die drei Linien $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, $\vartheta\eta$ parallel, folglich $\beta\mu = \mu\vartheta$, mithin, da $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$, $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$. Offenbar ist auch $\beta\varkappa = \varepsilon\vartheta$.

Bleibt dieselbe Voraussetzung, und [*Command. LXXXI.*] berührt $\beta\gamma$ den Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$, so ist wiederum $\beta\varepsilon = \varepsilon\vartheta$.



Es sei wiederum λ der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$, und zieht man $\lambda\varepsilon$, so steht dieselbe auf $\beta\gamma$ senkrecht. Es sind demnach die drei Linien $\alpha\beta$, $\varepsilon\lambda$, $\eta\vartheta$ parallel, und da $\alpha\lambda = \lambda\eta$, so ist $\beta\varepsilon = \varepsilon\vartheta$, was zu beweisen war.

Zur achten Aufgabe. Bleiben die [*Command. LXXXII.*] beiden Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, und ist $\alpha\delta < \gamma\zeta$, aber $\alpha\delta = \gamma\eta$; wird ferner der Kreis $\beta\alpha\varkappa\gamma$ vervollständigt, zieht man die beliebige Gerade $\beta\varkappa$ und fällt darauf von η die Senkrechte $\eta\vartheta$, so ist $\beta\varepsilon = \vartheta\varkappa$.



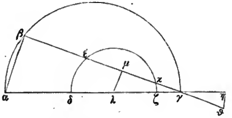
Fällt man von λ, dem Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta\gamma$, die Senkrechte $\lambda\mu$ auf $\varepsilon\zeta$, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, $\alpha\delta = \eta\gamma$, so ist $\delta\lambda = \lambda\eta$. Es sind aber die drei Linien $\delta\varepsilon$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ parallel, mithin $\varepsilon\mu = \mu\vartheta$. Nun ist $\beta\mu = \mu\varkappa$, daher $\beta\varepsilon = \vartheta\varkappa$. Offenbar ist auch $\vartheta\beta = \varepsilon\varkappa$.

Εἰς τὸ ἑπτακαιδέκατον. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω μείζων ἡ αδ τῆς ζγ, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ ζη, καὶ διαχθείσης τῆς βγθ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ κθ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εκ κάθετος ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αδ τῇ ζη, ἡ δὲ δλ τῇ λζ, ὅλη ἄρα ἡ αλ ὅλῃ τῇ λη ἐστὶν ἴση. καί εἰσι πάλιν τρεῖς παράλληλοι αἱ βα, μλ, ηθ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βμ τῇ μθ, ὧν ἡ εμ τῇ μκ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ κθ ἐστὶν ἴση. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἡ βκ τῇ εθ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐφαπτέσθω ἡ βγ τοῦ δεζ ἡμικυκλίου· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εθ. Εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λε· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν βθ, ὥστε τρεῖς εἰσι παράλληλοι αἱ αβ, λε, ηθ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ αλ τῇ λη· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βε τῇ εθ.

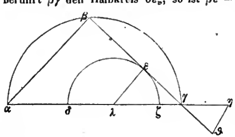
Πρόβλημα χρήσιμον εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ ἑπτακαιδεκάτου. Θέσει ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ αβγ καὶ δοθέντος τοῦ δ, γράψαι διὰ τοῦ δ ἡμικύκλιον ὡς τὸ δεζ, ἵνα ἐὰν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ βγ, ἴση γένηται ἡ αδ τῇ βε. Γεγονέτω· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν εγ οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν εγ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ εβ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ οὕτως ἐστίν, ἐὰν κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου ληφθῇ τὸ η καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ηε, τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ εγ ἡ τῶν ἀπὸ εη, ηγ ἐστὶν ὑπεροχή· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη, ηγ ὑπεροχὴν οὕτω τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ. κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αθ, καὶ τετμήσθω ἡ δγ δίχα κατὰ τὸ κ σημεῖον.

Zur siebzehnten Aufgabe. Unter [*Command. LXXXIII.*] derselben Voraussetzung sei $\alpha\delta > \zeta\gamma$, $\alpha\delta = \zeta\eta$, und es werde auf die durchgelegte Linie $\beta\gamma\vartheta$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt, so ist $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$.



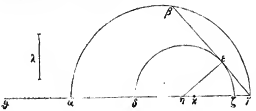
Fällt man von λ, dem Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$, auf $\varepsilon\varkappa$ die Senkrechte $\lambda\mu$, so ist $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\alpha\delta = \zeta\eta$, $\delta\lambda = \lambda\zeta$, so ist $\alpha\lambda = \lambda\eta$. Es sind aber die drei Linien $\beta\alpha$, $\mu\lambda$, $\eta\vartheta$ parallel, folglich $\beta\mu = \mu\vartheta$; hiervon ist $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$, mithin $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$. Offenbar ist auch $\beta\varkappa = \varepsilon\vartheta$, was zu beweisen war.

Bleibt dieselbe Voraussetzung, und [*Command. LXXXIV.*] berührt $\beta\gamma$ den Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$, so ist $\beta\varepsilon = \varepsilon\vartheta$.



Ist wiederum λ der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$ und zieht man $\lambda\varepsilon$, so steht dieselbe auf $\beta\vartheta$ senkrecht, daher sind die drei Linien $\alpha\beta$, $\lambda\varepsilon$, $\eta\vartheta$ parallel, und da $\alpha\lambda = \lambda\eta$, so ist $\beta\varepsilon = \varepsilon\vartheta$.

Eine Aufgabe zur Synthesis der [*Command. LXXXV.*] siebzehnten Aufgabe zu gebrauchen. Es sei der Halbkreis $\alpha\beta\gamma$ und der Punkt δ der Lage nach gegeben, es soll durch δ ein Halbkreis wie $\delta\varepsilon\zeta$ beschrieben werden, so dass, wenn man die Tangente $\beta\gamma$ zieht, $\alpha\delta = \beta\varepsilon$ wird.



Es sei geschehen. Es ist nun $\alpha\delta : \varepsilon\gamma = \beta\varepsilon : \varepsilon\gamma$, und Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$:

ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη,ηγ ὑπεροχήν· λοιπὸν[1]) πρὸς λοιπὸν, [λοιπὸν] ἄρα τὸ ὑπὸ δηθ πρὸς λοιπὸν τὸ ἀπὸ ηδ. τουτέστιν ἡ θη πρὸς ηδ, ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη,ηγ ὑπεροχήν, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ δγ,λ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ δγ,ηκ.[2]) κείσθω οὖν τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ ἴσον τὸ δὶς ὑπὸ δγ,λ. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ αδ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ δγ,λ. ὥστε καὶ τὸ ἅπαξ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ γδ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ λ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ηθ πρὸς τὴν ηδ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ λ,δγ, πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ δγ,ηκ. τουτέστιν ἡ λ πρὸς ηκ· τὸ ἄρα ὑπὸ θηκ ἴσον τῷ ὑπὸ λ,ηδ. καί εἰσιν αἱ τρεῖς αἱ θδ, δκ, λ δοθεῖσαι· ἀπῆκται [ἄρα] εἰς διωρισμένης· δεδομένων τριῶν εὐθειῶν τῶν θδ, δκ, λ, τεμεῖν τὴν δκ κατὰ τὸ η καὶ ποιεῖν λόγον τοῦ ὑπὸ θηκ πρὸς τὸ ὑπὸ λ,ηδ ἴσου πρὸς ἴσον. τοῦτο δὲ φανερὸν, καὶ ἔστιν ἀδιόριστος. δοθὲν ἄρα τὸ η καὶ κέντρον τοῦ δεζ ἡμικυκλίου· θέσει ἄρα τὸ ἡμικύκλιον. καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ γ ἦκται ἐφαπτομένη ἡ βγ· θέσει ἄρα ἡ βγ. τὸ δ' αὐτὸ ἁρμόσει τοῦ σημείου κάτω. ὅπερ: —

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω τὸ μὲν ἡμικύκλιον τὸ αβγ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ δ· καὶ δέον ἔστω ποιεῖν τὸ πρόβλημα. κείσθω τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ ἴσον τὸ δὶς ὑπὸ δγ,λ, καὶ τῇ μὲν δα ἴση κείσθω ἡ αθ, ἡ δὲ δγ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ κ σημεῖον. καὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν θδ,

---

1) Die Hdsch. haben λοιπή.

2) So emendirt *Commandin* diese Stelle; die Hdsch. haben τουτέστι πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ δγ,λ.

Quadrat über $\varepsilon\gamma$; aber Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$, (wenn η der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$ und die Linie $\eta\varepsilon$ gezogen wird), und Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\varepsilon\eta$, mithin Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$ = Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$. Es sei nun $\delta\alpha = \alpha\vartheta$, und $\delta\gamma$ im Punkte $\varkappa$ halbirt. Da

Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$,

so ist durch Differenz Rechteck $\delta\eta\,.\,\eta\vartheta$: Quadrat über $\eta\delta$ (d. h. $\vartheta\eta$: $\eta\delta$), wie eins der Verhältnisse, also wie Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$ = 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\lambda$: 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\eta\varkappa$. Es sei also 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\lambda$ = Quadrat über $\alpha\delta$. Es ist aber Quadrat über $\alpha\delta$ gegeben, folglich auch 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\lambda$, daher auch das einfache Rechteck. Nun ist $\gamma\delta$ gegeben, mithin auch λ. Da aber $\eta\vartheta$: $\eta\delta$ = Quadrat über $\alpha\delta$ (= 2 Rechteck $\lambda\,.\,\delta\gamma$) : 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\eta\varkappa$ = λ : $\eta\varkappa$, so ist Rechteck $\vartheta\eta\,.\,\eta\varkappa$ = Rechteck $\lambda\,.\,\eta\delta$. Auch sind die drei Linien $\vartheta\delta$, $\delta\varkappa$, λ gegeben. Wir kommen somit auf eine Aufgabe des bestimmten Schnittes: Wenn die drei Geraden $\vartheta\delta$, $\delta\varkappa$, λ gegeben sind, $\delta\varkappa$ so im Punkte η zu theilen, dass das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\eta\,.\,\eta\varkappa$: Rechteck $\lambda\,.\,\eta\delta$ ein Verhältniss der Gleichheit wird. Dies geschieht ohne Schwierigkeit, und es findet keine Determination statt. Es ist also der Punkt η gegeben und ist der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$. Daher ist der Halbkreis der Lage nach gegeben. Von dem gegebenen Punkt γ ist die Tangente $\beta\gamma$ gezogen, folglich ist sie der Lage nach gegeben. Eben dasselbe passt, wenn der Punkt unterhalb liegt.

Synthesis. Es sei $\alpha\beta\gamma$ der Halbkreis, und δ der gegebene Punkt; es soll die Aufgabe gelöst werden. Es sei 2 Rechteck $\delta\gamma\,.\,\lambda$ = Quadrat über $\alpha\delta$, $\alpha\vartheta = \delta\alpha$, und $\delta\gamma$ in $\varkappa$ halbirt. Ferner theile man von den drei gegebenen Graden $\vartheta\delta$, $\delta\varkappa$, λ die Gerade $\delta\varkappa$ in η so, dass das Verhältniss von Rechteck $\lambda\,.\,\eta\delta$: Rechteck $\vartheta\eta\,.\,\eta\varkappa$ ein Verhältniss der Gleichheit wird. Alsdann beschreibe man um η den Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$, so wird dies der verlangte sein. Zieht man nämlich an den Halbkreis die Tangente $\beta\gamma$, so ist $\alpha\delta = \beta\varepsilon$. Denn da Rechteck $\vartheta\eta\,.\,\eta\varkappa$ = Rechteck $\lambda\,.\,\eta\delta$, so ist $\vartheta\eta$: $\eta\delta$ = λ : $\eta\varkappa$; aber

δκ, λ, τετμήσθω ἡ δκ κατὰ τὸ η καὶ ποιείτω λόγον τοῦ ὑπὸ λ,ηδ πρὸς τὸ ὑπὸ θηκ ἴσον πρὸς ἴσον, καὶ περὶ κέντρον τὸ η ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δεζ· λέγω ὅτι τὸ δεζ ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου ἡ βγ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ βε. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ θηκ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ λ,ηδ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ θη πρὸς τὴν ηδ οὕτως ἐστὶν ἡ λ πρὸς τὴν ηκ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ θη πρὸς τὴν ηδ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ θηδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηδ, τουτέστιν ἡ τῶν ἀπὸ ηα,αδ ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἀπὸ ηδ· ὡς δὲ ἡ λ πρὸς τὴν ηκ οὕτως ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ λ,δγ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ δγ,ηκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη,ηγ ὑπεροχὴν. καὶ ὡς ἄρα ἡ τῶν ἀπὸ ηα,αδ ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἀπὸ ηδ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη, ηγ ὑπεροχήν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δη, ηγ ὑπεροχὴν, τουτέστι πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ γη, ηε ὑπεροχὴν, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αη τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ αδ τῷ ἀπὸ βε· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ βε. καὶ φανερὸν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ βε τῆς εγ. ἔχομεν γὰρ ὡς τὴν θη πρὸς τὴν ηδ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ·[1]) μείζων δὲ ἡ θη τῆς ηδ, μεῖζον [ἄρα] τὸ ἀπὸ αδ τοῦ ἀπὸ εγ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς εγ, πολλῷ ἄρα τῆς ζγ μείζων ἐστὶν. τὸ δεζ ἄρα ἡμικύκλιον ποιεῖ τὸ πρόβλημα. λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. γεγράφθω γάρ τι καὶ ἕτερον δμν, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ γμξ. εἰ δὴ καὶ τὸ δμν ποιεῖ τὸ πρόβλημα, ἔσται ἴση ἡ αδ τῇ μξ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ δμν ἡμικυκλίου τὸ ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ομ, ἔσται ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει τὸ ὑπὸ τῶν θοκ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν λ, δο, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ἐν γὰρ τῇ διωρισμένῃ δέδεικται μεῖζον. οὐκ ἄρα τὸ δμν ἡμικύκλιον ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ δεζ· τὸ δζε ἄρα μόνον ποιεῖ τὸ πρόβλημα.[2]) ἵνα δὲ καὶ ἐπιγνῶμεν πότερον αὐτῶν μεῖζον

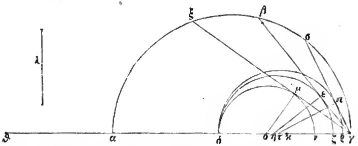
[1]) Hier folgen in den Hdsch. die Worte ἀναβαίνει δὲ ἐπισκεπτομένων (eine Hdsch. hat ἐπὶ ἐπισκεπτομένων) die auch *Commandin* als eine überflüssige Glosse ausgelassen hat.

[2]) So emendirt *Commandin* diese Stelle; die Hdsch. haben ἐστὶ μόνον ποιοῦν τὸ.

$\vartheta\eta : \eta\delta$ = Rechteck $\vartheta\eta \cdot \eta\delta$: Quadrat über $\eta\delta$
= Quadrat über $\eta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\delta$,
und $\lambda : \eta\varkappa$ = 2 Rechteck $\lambda \cdot \delta\gamma$: 2 Rechteck $\delta\gamma \cdot \eta\varkappa$
= Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$;
mithin Quadrat über $\eta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\delta$
= Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$,
demnach Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$,
aber Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\delta\eta$ = Quadrat über $\eta\gamma$ — Quadrat über $\eta\varepsilon$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$,
folglich Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$.
Nun ist Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$,
demnach Quadr. über $\beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$,
mitbin Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$, und $\alpha\delta = \beta\varepsilon$.
Offenbar ist aber $\beta\varepsilon > \varepsilon\gamma$, denn wir haben

$$\vartheta\eta : \eta\delta = \text{Quadrat über } \alpha\delta : \text{Quadrat über } \varepsilon\gamma,$$

aber $\vartheta\eta > \eta\delta$, mithin Quadrat über $\alpha\delta >$ Quadrat über $\varepsilon\gamma$ und $\alpha\delta > \varepsilon\gamma$, daher $\alpha\delta$ um vieles grösser als $\zeta\gamma$.
Der Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$ löst also die Aufgabe. Ich behaupte nun, dass er allein sie löst. Man beschreibe irgend einen andern $\delta\mu\nu$ und ziehe die Tangente $\gamma\mu\xi$. Wenn nun $\delta\mu\nu$ die Aufgabe löst, so wird $\alpha\delta = \mu\xi$ sein.



Ist o der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\mu\nu$ und zieht man $o\mu$, so ist der Analysis zufolge Rechteck $\vartheta o \cdot o\varkappa$ = Rechteck $\lambda \cdot \delta o$, was ungereimt ist, denn in der Lehre vom bestimmten Schnitt ist gezeigt, dass es grösser ist. Folglich löst der Halbkreis $\delta\mu\nu$ die

ἀποτέμνει, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ ἐν τῇ διωρισμένῃ δέδεικται ἔλασσον τὸ ὑπὸ τῶν λ,δο τοῦ ὑπὸ τῶν θοκ, ἀνάλογος ἡ λ πρὸς οκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θο πρὸς οδ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ λ πρὸς κο οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δο, ογ ὑπεροχήν, δέδεικται γάρ. ὡς δὲ ἡ θο πρὸς οδ οὕτως ἐστὶν ἡ τῶν ἀπὸ οα, αδ πρὸς τὸ ἀπὸ οδ, καὶ τὸ ἀπὸ αδ ἄρα πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ δο, ογ ὑπεροχὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τῶν ἀπὸ οα,αδ ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἀπὸ οδ· καὶ πάντα πρὸς πάντα, ὡς τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ γο, οδ ὑπεροχήν, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ γμ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ αο πρὸς τὸ ἀπὸ ογ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ξμ πρὸς τὸ ἀπὸ μγ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ξμ τῆς αδ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ μεταξὺ τῶν α, β σημείων γινόμεναι εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς αδ, αἱ δὲ μεταξὺ τῶν β, γ ἐλάσσονες. ἐὰν γὰρ πάλιν γράψωμεν ἡμικύκλιον τὸ δπρ, καὶ ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ σπγ, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευασθῇ, τὸ μὲν κέντρον ἔσται τοῦ δπρ ἡμικυκλίου τὸ τ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ η· ἐν δὲ τῇ διωρισμένῃ μεῖζον ἔσται τὸ ὑπὸ θηκ τοῦ ὑπὸ θτκ, κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων ἔσται πάλιν ἡ αδ τῆς σπ, ὥστε τὰ μὲν ἔγγιστα τοῦ α, τὰς ἐφαπτομένας ἔχοντα, μείζονα ποιεῖ τῆς αδ, τὰ δὲ ἀπώτερον ἐλάσσω. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ γράψαι διὰ τοῦ δ ἡμικύκλια, ἵνα ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου αὐτῶν προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὴν τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου τὴν μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου ἴσην ποιεῖ τῇ αδ, καὶ πάλιν μείζω καὶ ἐλάσσω.

Εἰς τὸ ιθ. Ἔστω πάλιν τὰ ἡμικύκλια, μείζων δὲ ἡ αδ τῆς γζ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ γη, καὶ διαχθείσης τῆς βεζ, ἀπὸ τοῦ η ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ, καὶ προσαναπεπληρώσθω τὸ αβγ ἡμικύκλιον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βζ ἐπὶ τὸ

Aufgabe nicht. Auf gleiche Weise wird gezeigt, dass auch kein anderer Halbkreis ausser $\delta\varepsilon\zeta$ die Aufgabe löst; demnach löst der Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$ die Aufgabe allein Welcher von beiden Halbkreisen ein grösseres Stück abschneidet, wird auf folgende Weise dargethan. In der Lehre von dem bestimmten Schnitt ist gezeigt, dass Rechteck $\lambda \,.\, \delta o <$ Rechteck $\vartheta o \,.\, o\varkappa$, mithin $\lambda : o\varkappa < \vartheta o : o\delta$; aber es ist, wie bewiesen, $\lambda : \varkappa o =$ Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $o\gamma$ — Quadrat über $o\delta$, und $\vartheta o : o\delta =$ Quadrat über $o\alpha$ — Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $o\delta$,

mithin Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $o\gamma$ — Quadrat über $o\delta$

$<$ Quadrat über $o\alpha$ - Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $o\delta$,

folglich durch Zusammenfassen

Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $o\gamma$ — Quadrat über $o\delta$

(d. h. Quadrat über $\gamma\mu$)

$<$ Quadrat über $o\alpha$: Quadrat über $o\gamma$

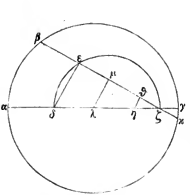
d. h. $<$ Quadrat über $\xi\mu$: Quadrat über $\mu\gamma$,

es ist demnach $\xi\mu > \alpha\delta$. Auf gleiche Weise lässt sich nun zeigen, dass auch alle zwischen den Punkten α, β fallenden Linien grösser, dagegen alle zwischen β, γ liegenden kleiner sind als $\alpha\delta$. Denn beschreiben wir wiederum den Halbkreis $\delta\pi\varrho$, ziehen die Tangente $\sigma\pi\gamma$ und machen dieselbe Construction wie früher, so wird τ, der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\pi\varrho$, auf der andern Seite des Punktes η liegen. Nach der Lehre vom bestimmten Schnitt ist Rechteck $\vartheta\eta \,.\, \eta\varkappa >$ Rechteck $\vartheta\tau \,.\, \tau\varkappa$, und demnach $\alpha\delta > \sigma\pi$; daher schneiden die Halbkreise, deren Tangenten dem Punkte α am nächsten liegen, grössere Stücke, die entfernter liegenden kleinere Stücke, als $\alpha\delta$ ab. Es ist also möglich, durch den Punkt δ Halbkreise zu beschreiben, so dass wenn man die Tangente eines jeden derselben bis zur Peripherie des grössern Halbkreises verlängert, die zwischen dem Berührungspunkt und der Peripherie des grösseren Halbkreises liegende Gerade gleich, grösser oder kleiner als $\alpha\delta$ wird.

Zur neunzehnten Aufgabe. Bleiben [*Command. LXXXVI.*] wiederum die Halbkreise, ist $\alpha\delta > \gamma\zeta$, $\alpha\delta = \gamma\eta$, wird auf die durchgelegte Linie von η die Senkreckte $\eta\vartheta$ gefällt, der Halbkreis $\alpha\beta\gamma$ vervollständigt, und $\beta\zeta$ bis $\varkappa$ verlängert, so ist $\beta\vartheta = \varepsilon\varkappa$.

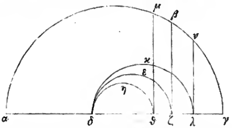
κ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βθ τῇ εκ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου τὸ λ καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν βκ κάθετος ἤχθω ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μβ τῇ μκ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αλ τῇ λγ, ἡ δὲ αδ τῇ ηγ, λοιπὴ ἄρα ἡ δλ λοιπῇ τῇ λη ἐστὶν ἴση· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ δε, λμ, ηθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ εμ τῇ μθ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βμ ὅλῃ τῇ μκ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ θκ ἐστὶν ἴση. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ βθ τῇ εκ [ἴση ἐστίν]. ὅπερ: —

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. Ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ αβγ, καὶ σημείου τοῦ δ, γράψαι ἐπὶ τῆς αγ διὰ τοῦ δ ἡμικύκλιον, ἵνα ἴση ᾖ ἡ αδ, ἐὰν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ζβ, τῇ ζβ. Γεγονέτω· ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ ζβ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ αδ τῷ ἀπὸ ζβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αζγ. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ αδ ἴσον παρὰ τὴν αγ παραβάλωμεν ἐλλεῖπον τετραγώνῳ, ὡς τὸ ὑπὸ αζγ, καὶ ἀγάγω ὀρθὴν τὴν ζβ, καὶ ἐπὶ τῆς δζ ἡμικύκλιον γράψω τὸ δεζ, ἐφάπτεται ἡ βζ τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἔσται ἴση τῇ αδ. τοῦτο δὲ γίνεται, ὁπόταν ἡ αδ ἐλάσσων ᾖ ἢ ἡ ἡμίσεια τῆς αγ. εὑρημένου δὴ τούτου, ἐὰν διὰ τοῦ δ ἕτερα ἡμικύκλια γράψω, ὡς τὰ δηθ, δκλ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν αἱ θμ, λν, ἔσται ἡ μὲν θμ μείζων τῆς αδ, ἡ δὲ λν ἐλάσσων· ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ τῆς δγ ἐλάσσων ἐστίν, ἡ θμ ἄρα ἔσται μεταξὺ τῶν δ, γ. ἐπὶ μὲν οὖν τὸ ζ οὐ πεσεῖται, ἐπεὶ συμβήσεται ἴσην γίνεσθαι τὴν θγ τῇ ζγ, ὅπερ ἄτοπον· μεταξὺ δὲ τῶν γ, ζ πολλῷ μᾶλλον οὐκ ἔστιν, ἐπεὶ πάλιν συμβαίνει ἐλάσσονα εἶναι τὴν αδ τῆς ζγ, ὅπερ ἄτοπον, ἔστι γὰρ καὶ μείζων, ὡς ἐν τῷ ἐξ ἀρχῆς ὑπόκειται προβλήματι. ἔσται ἄρα μεταξὺ τῶν ζ, δ τὸ θ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αθγ, τουτέστι τὸ ἀπὸ μθ, τοῦ ὑπὸ αζγ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ζβ, μεῖζον ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ αδ· ὥστε μείζων ἡ θμ τῆς αδ. ἡ δὲ [λν] μεταξὺ τῶν γ, ζ· ἐπειδὴ ἔλασσόν ἐστι τὸ ὑπὸ αλγ τοῦ ἀπὸ αδ, ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ αζγ· ἔλλασσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ λν τοῦ ἀπὸ αδ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λν τῆς αδ. ὁμοίως καὶ πᾶσαι αἱ ἐπὶ τὰ ὡς πρὸς τῷ γ μέρη εὐθεῖαι. καὶ καθόλου προσιόντων μὲν τῶν ἡμικυκ-



Wird von λ, dem Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta\gamma$, auf βx die Senkrechte $\lambda\mu$ gefällt, so ist $\mu\beta = \mu x$. Da nun $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, $\alpha\delta = \eta\gamma$, so ist $\delta\lambda = \lambda\eta$; es sind aber die drei Linien $\delta\varepsilon$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ parallel, mithin $\varepsilon\mu = \mu\vartheta$. Nun ist $\beta\mu = \mu x$, folglich $\beta\varepsilon = \vartheta x$. Offenbar ist daher $\beta\vartheta = \varepsilon x$.

Eine Aufgabe zu eben derselben. [*Command. LXXXVII.*] Es sei der Halbkreis $\alpha\beta\gamma$ und der Punkt δ gegeben, es soll über $\alpha\gamma$ durch den Punkt δ ein Halbkreis beschrieben werden, so dass, wenn man die Tangente $\zeta\beta$ zieht, $\alpha\delta = \zeta\beta$ ist.



Es sei geschehen. Da also $\alpha\delta = \zeta\beta$, so ist auch Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\zeta\beta$ = Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$. Wenn wir demnach ein dem Quadrat über $\alpha\delta$ gleiches Rechteck, dem zu seiner Ergänzung ein Quadrat fehlt, an der Linie $\alpha\gamma$ anlegen, wie Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\gamma$, die Senkrechte $\zeta\beta$ ziehen, und über $\delta\zeta$ den Halbkreis $\delta\varepsilon\zeta$ beschreiben, so berührt $\beta\zeta$ den Halbkreis und ist $= \alpha\delta$. Dies findet aber statt, wenn $\alpha\delta$ kleiner als die Hälfte von $\alpha\gamma$ ist. Ist nun der Halbkreis gefunden, und beschreiben wir durch δ andere Halbkreise wie $\delta\eta\vartheta$, $\delta x\lambda$ und ziehen die Tangenten $\vartheta\mu$, $\lambda\nu$, so ist $\vartheta\mu > \alpha\delta$, $\lambda\nu < \alpha\delta$. Da nämlich $\alpha\delta < \delta\gamma$, so liegt $\vartheta\mu$ zwischen δ, γ; in ζ fällt es nicht, denn sonst würde $\vartheta\gamma = \zeta\gamma$, was ungereimt ist; noch weniger fällt es zwischen γ, ζ, denn alsdann würde $\vartheta\gamma < \zeta\gamma$, was ebenfalls widersinnig ist, denn $\vartheta\gamma > \zeta\gamma$, wie ursprünglich in der Aufgabe angenommen ist. Es liegt also der Punkt ϑ zwischen ζ, δ. Nun ist

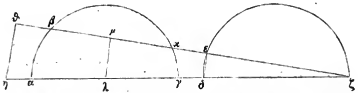
λίων τῷ γ σημείῳ, οὗ ἐφάπτεται ἐλάσσων ἐστὶ τῆς αδ. αποχωρούντων δὲ, αἰεὶ μείζων. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐπὶ μὲν τῆς αγ διὰ τοῦ δ ἡμικύκλια γράψαι, ἵνα ὁτὲ μὲν αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἴσαι ὦσι τῇ αδ, ὁτὲ δὲ μείζονες, ὁτὲ δὲ ἐλάσσονες.

Εἰς τὸ κα. Ἔστω ἡμικύκλια τὰ αβγ, δεζ, τῇ γδ ἴση κείσθω ἡ αη, καὶ διαχθείσης τῆς ζβ, ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ θβ τῇ κε. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν βζ κάθετος ἤχθω ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ηα τῇ γδ, ἡ δὲ αλ τῇ λγ, ὅλη ἄρα ἡ ηλ ὅλῃ τῇ λδ ἴση ἐστίν· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ ηθ, λμ, δε· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ θμ τῇ με, ὧν ἡ βμ τῇ μκ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ θβ τῇ κε ἴση ἐστίν. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἡ θκ τῇ βε ἴση ἐστίν. ὅπερ: —

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐφαπτέσθω ἡ βζ κατὰ τὸ β· ὅτι πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ θβ τῇ βε. Εἰλήφθω γὰρ πάλιν τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἡμικυκλίου τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ β ἐπεζεύχθω ἡ κβ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν ἐν τρισὶ παραλλήλοις ταῖς ηθ, βκ, δε ἴση ἐστὶν ἡ ηκ τῇ κδ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ θβ τῇ βε. ὅπερ: —

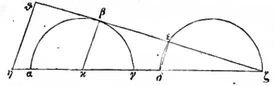
Rechteck $\alpha\vartheta \,.\, \vartheta\gamma$ d. h. Quadrat über $\mu\vartheta$ > Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\gamma$ d. h. Quadrat über $\zeta\beta$, mithin auch grösser als Quadrat über $\alpha\delta$, daher $\vartheta\mu > \alpha\delta$. Die Linie $\lambda\nu$ liegt zwischen γ, ζ, weil Rechteck $\alpha\lambda \,.\, \lambda\gamma$ < Quadrat über $\alpha\delta$, denn Rechteck $\alpha\lambda \,.\, \lambda\gamma$ < Rechteck $\alpha\zeta \cdot \zeta\gamma$; mithin Quadrat über $\lambda\nu$ < Quadrat über $\alpha\delta$, daher $\lambda\nu . \alpha\delta$. Auf gleiche Weise verhält es sich mit allen Linien, die nach dem Punkt γ zu liegen. Demnach ist allgemein von den Halbkreisen, die sich dem Punkt γ nähern, die Tangente kleiner als $\alpha\delta$, dagegen wird die Tangente der sich davon entfernenden Halbkreise immer grösser sein. Es ist also möglich, über $\alpha\gamma$ durch den Punkt δ Halbkreise zu beschreiben, dass die Tangenten derselben bald gleich, bald grösser, bald kleiner als $\alpha\delta$ sind.

Zur ein und zwanzigsten Aufgabe. [*Command. LXXXVIII.*] Hat man die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\gamma\delta = \alpha\eta$, und auf die durchgelegte Linie $\zeta\beta$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt, so ist $\vartheta\beta = \varkappa\varepsilon$.



Man fälle von λ, dem Mittelpunkt des Halbkreises $\alpha\beta\gamma$, die Senkrechte $\lambda\mu$ auf $\beta\zeta$, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\eta\alpha = \gamma\delta$, $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, mithin $\eta\lambda = \lambda\delta$, und da die drei Linien $\eta\vartheta$, $\lambda\mu$, $\delta\varepsilon$ parallel sind, so ist $\vartheta\mu = \mu\varepsilon$; hiervon $\beta\mu = \mu\varkappa$ subtrahirt, ist $\vartheta\beta = \varkappa\varepsilon$. Offenbar ist auch $\vartheta\varkappa = \beta\varepsilon$, was zu beweisen war.

Bleibt dieselbe Voraussetzung, und [*Command. LXXXIX.*] ist $\beta\zeta$ eine Tangente im Punkte β, so ist wiederum $\vartheta\beta = \beta\varepsilon$.



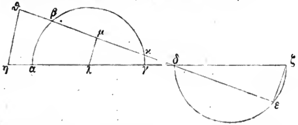
Zieht man von α, dem Mittelpunkt d. Halbkr. $\alpha\beta\gamma$, nach $\alpha\beta$ die Linie $\varkappa\beta$, so ist sie auf $\beta\zeta$ senkrecht. Da nun zwischen den drei Parallelen $\eta\vartheta$, $\beta\varkappa$, $\varepsilon\delta$, $\eta\varkappa = \varkappa\delta$ ist, so ist auch $\vartheta\beta = \beta\varepsilon$, was zu beweisen war.

Εἰς τὸ $\overline{\kappa\gamma}$. Ἔστω τὰ ἡμικύκλια τὰ αβγ, δεζ, καὶ τῇ γδ ἴση κείσθω ἡ αη, καὶ διαχθείσης τῆς εθ, ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ θβ τῇ κδ. Εἰλήφθω τὸ τοῦ αβγ ἡμικυκλίου κέντρον τὸ λ, καὶ κάθετος ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ηα τῇ γδ, ἡ δὲ αλ τῇ λγ, ὅλη ἄρα ἡ ηλ ὅλῃ τῇ λδ ἐστὶν ἴση· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ ηθ, λμ, εζ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ θμ τῇ μδ, ὧν ἡ βμ τῇ μκ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ βθ λοιπῇ τῇ κδ ἐστὶν ἴση. κἂν ἐφάπτηται, φανερόν· ἡ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ τὴν ἁφὴν. ὅπερ: —

Εἰς τὸ $\overline{\kappa\delta}$. Ἔστω δύο ἡμικύκλια ὡς τὰ αβγ, δεζ, καὶ ἔστω ἴση ἡ αδ τῇ γδ, καὶ διήχθω ἡ ζβ· ὅτι γίνεται ἴση καὶ ἡ βε τῇ εη. Ἔστι δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δε, γίνεται ὀρθὴ ἡ ὑπὸ δεζ γωνία, διὰ τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ εἶναι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ αβγ ἡ δε· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βε τῇ εη. ὅπερ: —

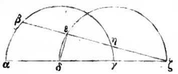
Εἰς τὸ $\overline{\kappa\epsilon}$. Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἔστω μείζων ἡ αδ τῆς δγ, καὶ τῇ δγ ἴση κείσθω ἡ αη, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βζ ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βθ τῇ εκ. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς δγ, τὸ ἄρα κέντρον τοῦ αβγ ἡμικυκλίου ἐστὶ μεταξὺ τῶν α, δ, ὡς τὸ λ, καὶ πάλιν κάθετος ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αη τῇ δγ, ἡ δὲ αλ τῇ λγ,

Zur drei und zwanzigsten Aufgabe. Hat [*Command. XC.*] man die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\gamma\delta = \alpha\eta$, und auf die durchgelegte Linie $\varepsilon\vartheta$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt, so ist $\vartheta\beta = \varkappa\delta$.



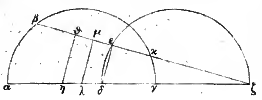
Fällt man von λ, dem Mittelpunkt des Halbkreises $\alpha\beta\gamma$, die Senkrechte $\lambda\mu$, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\eta\alpha = \gamma\delta$, $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, mithin $\eta\lambda = \lambda\delta$, und da die drei Linien $\eta\vartheta$, $\lambda\mu$, $\zeta\varepsilon$ parallel sind, so ist $\vartheta\mu = \mu\delta$; hiervon $\beta\mu = \mu\varkappa$ subtrahirt, ist $\beta\vartheta = \varkappa\delta$. Wenn die durchgelegte Linie eine Tangente wird, ist der Satz ohne Schwierigkeit zu beweisen; man zieht alsdann vom Mittelpunkt nach dem Berührungspunkt eine Linie.

Zur vier und zwanzigsten Aufgabe. Hat [*Command XCI.*] man die beiden Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\alpha\delta = \gamma\delta$ und ist die durchgelegte Linie $\zeta\beta$, so ist $\beta\varepsilon = \varepsilon\eta$.



Dies erhellt leicht, denn zieht man $\delta\varepsilon$, so ist $\angle\, \delta\varepsilon\zeta = R$ als Winkel im Halbkreis; nun geht $\delta\varepsilon$ vom Mittelpunkt des Halbkreises $\alpha\beta\gamma$, mithin $\beta\varepsilon = \varepsilon\eta$, was zu beweisen war.

Zur fünf und zwanzigsten Aufgabe. [*Command. XCII.*] Bleibt dieselbe Voraussetzung, und ist $\alpha\delta > \delta\gamma$, $\delta\gamma = \alpha\eta$, und steht $\eta\vartheta$ auf $\beta\zeta$ senkrecht, so ist $\beta\vartheta = \varepsilon\varkappa$.



Da $\alpha\delta > \delta\gamma$, so liegt der Mittelpunkt d. Halbkreis. $\alpha\beta\gamma$ zwischen α, δ z. B. in λ; ist also $\lambda\mu$ eine

λοιπὴ ἄρα ἡ ηλ [λοιπῇ] τῇ λδ ἴση ἐστίν· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ ηϑ, λμ, δε, ἴση ἄρα καὶ ἡ ϑμ τῇ με· ἣν δὲ καὶ ὅλη ἡ βμ ὅλῃ τῇ μκ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βϑ λοιπῇ τῇ εκ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

Εἰς τὸ κς. Ἔστω ἡ αδ ἐλάσσων τῆς δγ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ γη, καὶ κάθετος ἡ ηϑ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ κϑ. Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αδ τῆς δγ, τοῦ αβγ ἡμικυκλίου τὸ κέντρον ἐστὶ μεταξὺ τῶν δ, η· ἔστω τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν ζβ κάθετος ἤχθω ἡ λμ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ γη, [ἡ δὲ αλ τῇ λγ, λοιπὴ ἄρα ἡ δλ λοιπῇ τῇ λη ἴση ἐστὶ][1]) καὶ τρεῖς παράλληλοι αἱ δε, λμ, ηϑ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εμ τῇ μϑ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βμ ὅλῃ τῇ μκ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ κϑ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

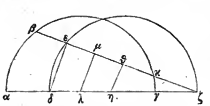
Εἰς τὸ κϑ. Ὄντων δύο ἡμικυκλίων τῶν αβγ, δεζ, καὶ μείζονος οὔσης τῆς αδ τῇ δγ, ἐὰν τῇ δγ ἴση τεϑῇ ἡ αη, καὶ διαχϑείσης τῆς ζβ, ἐπ' αὐτὴν κάϑετος ἀχϑῇ ἡ ηϑ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ϑβ τῇ κε. Εἰλήφϑω τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἡμικυκλίου τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν βζ κάθετος ἤχθω ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αλ τῇ λγ, ἡ δὲ αη τῇ δγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ηλ λοιπῇ τῇ λδ ἐστὶν ἴση· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ ηϑ, λμ, δε, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ϑμ τῇ με, ὧν ἡ βμ τῇ μκ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ϑβ λοιπῇ τῇ κε ἐστὶν ἴση. φανερὸν ὡς καὶ ἡ ϑκ τῇ βε ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

Εἰς τὸ λα. Ἔστω τὰ αβγ, δεζ ἡμικύκλια, καὶ πάλιν ἔστω ἐλάσσων ἡ αδ τῆς δγ, καὶ διήχϑω ἡ ζεβ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ γη, καὶ ἐπὶ τὴν ζβ κάθετος ἤχθω ἡ ηϑ· [ὅτι ἡ εβ τῇ κϑ ἴση ἐστίν]. Φανερὸν γὰρ ὅτι [ἡ ηϑ] οὔτε ἐπὶ τὸ κ πίπτει οὔτε μεταξὺ τῶν ζ, κ. ἐὰν τὸ κέντρον ληφϑῇ τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν βζ κάθετος ἀχθῇ ἡ λμ, ἔσται ἴση ἡ βμ τῇ μκ· ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ τρεῖς εἶναι παραλλήλους τὰς δε,

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

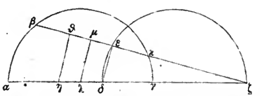
Senkrechte, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da ferner $\alpha\eta = \delta\gamma$, $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, mithin $\eta\lambda = \lambda\delta$, und da die drei Linien $\eta\vartheta$, $\lambda\mu$, $\delta\varepsilon$ parallel sind, so ist $\vartheta\mu = \mu\varepsilon$; es war aber $\beta\mu = \mu\varkappa$, folglich $\beta\vartheta = \varepsilon\varkappa$, was zu beweisen war.

Zur sechs und zwanzigsten Aufgabe. [*Command. XCIII.*] Es sei $\alpha\delta < \delta\gamma$, $\alpha\delta = \gamma\eta$, und $\eta\vartheta$ eine Senkrechte, so ist $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$.



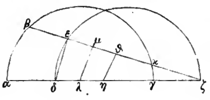
Da nämlich $\alpha\delta < \delta\gamma$, so liegt der Mittelpunkt des Halbkreises $\alpha\beta\gamma$ zwischen δ, η; er sei λ und von λ sei die Senkrechte $\lambda\mu$ auf $\zeta\beta$ gefällt, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\alpha\delta = \gamma\eta$, $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, mithin $\delta\lambda = \lambda\eta$, und da die drei Linien $\delta\varepsilon$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ parallel sind, so ist $\varepsilon\mu = \mu\vartheta$; es ist aber $\beta\mu = \mu\varkappa$, folglich $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$, was zu beweisen war.

Zur neun und zwanzigsten Aufgabe. Hat man die beiden Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\alpha\delta > \delta\gamma$, $\delta\gamma = \alpha\eta$, und wird auf die durchgelegte Linie $\zeta\beta$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt, so ist $\vartheta\beta = \varkappa\varepsilon$.



Fällt man von λ, dem Mittelpunkt des Halbkrs. $\alpha\beta\gamma$, auf $\beta\zeta$ die Senkrech. $\lambda\mu$, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$. Da nun $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, $\alpha\eta = \delta\gamma$, mithin $\eta\lambda = \lambda\delta$, und da die drei Linien $\eta\vartheta$, $\lambda\mu$, $\delta\varepsilon$ parallel sind, so ist $\vartheta\mu = \mu\varepsilon$; nun ist $\beta\mu = \mu\varkappa$, folglich $\vartheta\beta = \varkappa\varepsilon$. Offenbar ist auch $\vartheta\varkappa = \beta\varepsilon$, was zu beweisen war.

Zur ein und dreissigsten Aufgabe. Hat man die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\alpha\delta < \delta\gamma$, wird die Linie $\zeta\varepsilon\beta$ durchgelegt, ist $\alpha\delta = \gamma\eta$, und wird auf $\zeta\beta$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt, so ist $\varepsilon\beta = \varkappa\vartheta$.



Offenbar fällt die Senkrechte $\eta\vartheta$ weder in $\varkappa$ noch zwischen ζ, $\varkappa$. Wird vom Mittelpunkt λ auf $\beta\zeta$ die Senkrechte $\lambda\mu$ gefällt, so ist $\beta\mu = \mu\varkappa$;

λμ, ηθ ἴση γίνεται ἡ εμ τῇ μκ. ἴση γὰρ ἡ δλ τῇ λη· εἴη ἂν καὶ ἡ βμ τῇ με ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τὸ κ πίπτει. πολλῷ δὲ μᾶλλον ὅτι οὐδὲ μεταξὺ τῶν ζ, κ· τῶν ἐκτὸς ἄρα· [ἐπεὶ δὲ ἴση] ἐστὶν ἡ μὲν αλ τῇ λγ, ἡ δὲ αδ τῇ ηγ, λοιπὴ ἄρα ἡ δλ λοιπῇ τῇ λμ ἴση ἐστίν· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ δε, λμ, ηθ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εμ τῇ μθ, ὧν ἡ βμ τῇ μκ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ εβ λοιπῇ τῇ κθ ἐστὶν ἴση. φανερὸν δὲ καὶ ὡς ἡ εκ τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

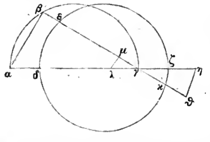
Εἰς τὸ λδ. Ἔστω τὰ αβγ, δεζ ἡμικύκλια, μείζων ἔστω ἡ δγ τῆς γζ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ ζη, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ [δεζκ][1]) κύκλος· διήχθω ἡ βγθ, καὶ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὴν βγ κάθετος ἤχθω· φανερὸν ὅτι ἐκτὸς πίπτει τοῦ κύκλου, παράλληλός γὰρ γίνεται τῇ αβ, ἣ δὲ αβ ὑποπίπτει, καὶ ἡ ηθ ἄρα ὑποπίπτει. ἔστω ἡ ηθ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ θκ. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δγ τῆς γζ, τὸ τοῦ δεζ ἡμικυκλίου κέντρον μεταξύ ἐστι τῶν γ, δ· ἔστω τὸ λ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αδ τῇ ζη, ἡ δὲ δλ τῇ λζ, ὅλη ἄρα ἡ αλ ὅλῃ τῇ λη ἐστὶν ἴση· καί εἰσι τρεῖς παράλληλοι αἱ αβ, λμ, ηθ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βμ τῇ μθ, ὧν ἡ εμ τῇ μκ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ βε λοιπῇ τῇ κθ ἐστὶν ἴση. φανερὸν ὡς καὶ ἡ βκ τῇ εθ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

Ἔστω πάλιν τὰ ἡμικύκλια τὰ αβγ, δεζ, καὶ μείζων ἡ δγ τῆς γζ, καὶ τῇ αδ ἴση κείσθω ἡ ζη, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ δεζκ κύκλος, καὶ διήχθω ἡ εβκ, καὶ ἀπὸ τοῦ η ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ηθ· φανερὸν δὲ ὅτι ἐντὸς πίπτει τοῦ κύκλου, ἐπεὶ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ ἡ αβ ἐντός· δεῖξαι ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ εβ τῇ θκ. Ἔστω τὸ κέντρον τὸ λ, καὶ πάλιν κάθετος ἡ λμ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εμ τῇ μκ. ἐπεὶ δὲ ἐν τρισὶ παραλλήλοις ταῖς αβ, λμ, ηθ ἴση ἐστὶν ἡ αλ τῇ λη, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βμ τῇ μθ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ εμ ὅλῃ τῇ μκ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ εβ λοιπῇ τῇ κθ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

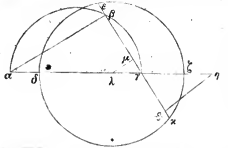
wegen der drei Parallelen $\delta\varepsilon$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ ist aber $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$,*) denn $\delta\lambda = \lambda\eta$; es wäre also $\beta\mu = \mu\varepsilon$, die grössere Linie gleich der kleineren, was unmöglich ist. Es fällt also $\eta\vartheta$ nicht in $\varkappa$. Noch weniger wird es zwischen ζ, $\varkappa$ fallen; es fällt also ausserhalb dieser Punkte. Da nun $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, $\alpha\delta = \eta\gamma$, mithin $\delta\lambda = \lambda\eta$, und da die drei Linien $\delta\varepsilon$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ parallel sind, so ist $\varepsilon\mu = \vartheta\mu$; nun ist $\beta\mu = \mu\varkappa$, folglich $\varepsilon\beta = \varkappa\vartheta$. Offenbar ist auch $\varepsilon\varkappa = \beta\vartheta$, was zu beweisen war.

Zur vier und dreissigsten Aufgabe. Hat [*Command. XCIV.*] man die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\delta\gamma > \gamma\zeta$, $\alpha\delta = \zeta\eta$, und wird der Kreis $\delta\varepsilon\zeta\varkappa$ vervollständigt; fällt man nun auf die durchgelegte Linie $\beta\gamma\vartheta$ von η die Senkrechte $\eta\vartheta$ (sie fällt offenbar ausserhalb des Kreises, da sie $\alpha\beta$ parallel ist, $\alpha\beta$ aber fällt ausserhalb des Kreises, also auch $\eta\vartheta$), so ist $\beta\varepsilon = \vartheta\varkappa$.



Da $\delta\gamma > \gamma\zeta$, so liegt λ, der Mittelpunkt des Halbkreises $\delta\varepsilon\zeta$, zwischen γ, δ. Man fälle die Senkrechte $\lambda\mu$. Da nun $\alpha\delta = \zeta\eta$, $\delta\lambda = \lambda\zeta$, mithin $\alpha\lambda = \lambda\eta$, und da die drei Linien $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$ parallel sind, so ist $\beta\mu = \mu\vartheta$; aber $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$, folglich $\beta\varepsilon = \varkappa\vartheta$. Offenbar ist auch $\beta\varkappa = \varepsilon\vartheta$, was zu beweisen war.

Hat man wiederum die Halbkreise $\alpha\beta\gamma$, [*Command. XCV.*] $\delta\varepsilon\zeta$, ist $\delta\gamma > \gamma\zeta$, $\alpha\delta = \zeta\eta$, wird der Kreis $\delta\varepsilon\zeta\varkappa$ vervollständigt, und von η auf die durchgelegte Linie $\varepsilon\varkappa$ die Senkrechte $\eta\vartheta$ gefällt (sie fällt offenbar innerhalb des Kreises, da die zu ihr parallele $\alpha\beta$ auch innerhalb des Kreises fällt), so ist $\varepsilon\beta = \vartheta\varkappa$.



Es sei λ der Mittelpunkt und $\lambda\mu$ eine Senkrechte, so ist $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$. Da nun zwischen den drei Parallelen $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, $\eta\vartheta$, $\alpha\lambda = \lambda\eta$, so ist auch

*) d. h. unter der Annahme, dass ϑ mit $\varkappa$ zusammenfallt.

Τὸ πρῶτον τῶν νεύσεων ἔχει προβλήματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς, καί εἰσιν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες ὄντες κατὰ τὸ πέμπτον, καὶ ὁ κατὰ τὸ ζ̄ πρόβλημα, καὶ ὁ κατὰ τὸ ϑ̄. τὸ δεύτερον νεύσεων ἔχει προβλήματα μ̄ε̄, διορισμοὺς τρεῖς, τόν τε κατὰ τὸ ῑζ̄ πρόβλημα, καὶ τὸν κατὰ τὸ ῑϑ̄, καὶ τὸν κατὰ τὸ κ̄γ̄· καί εἰσιν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες.

Ἐπαφῶν πρῶτον.

Εἰς τὸ ε̄ πρόβλημα. Δύο παράλληλοι αἱ αβ, γδ, καὶ κύκλος ἐφαπτέσθω ὁ εζ κατὰ τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εζ· ὅτι διάμετρός ἐστι τοῦ εζ κύκλου. Εἰλήφθω σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ η, ϑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εη, ηζ, εϑ, ϑζ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ αε, τέμνει δὲ ἡ εζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεζ γωνία τῇ ἐν τῷ ε ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εϑζ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δζε ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηζ ἐναλλάξ. καὶ ἡ ὑπὸ εϑζ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηζ γωνίᾳ. καὶ εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν· ὥστε καὶ ἡμικύκλιά ἐστιν ἑκάτερον εϑζ, εηζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τοῦ εζ κύκλου. ὅπερ: —

Ἔστω κύκλος ὁ αβδ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτοῦ αἱ βγ, γα, καὶ τετμήσθω ἡ γ γωνία δίχα τῇ γδ εὐθείᾳ· ὅτι ἐπὶ τῆς γδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ αβδ. Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, αε, δβ, βε. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ αγ, τέμνει δὲ ἡ γδ, τὸ ὑπὸ δγε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ γα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δαγ γω-

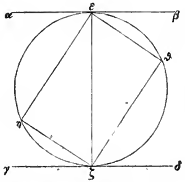
$\beta\mu = \mu\vartheta$; es ist aber $\varepsilon\mu = \mu\varkappa$, folglich $\varepsilon\beta = \varkappa\vartheta$, was zu beweisen war.

Das erste Buch von den Neigungen hat neun Aufgaben, drei Determinationen, und zwar sind diese drei Minima, nämlich zur fünften, zur siebenten und zur neunten Aufgabe. Das zweite Buch von den Neigungen enthält fünf und vierzig Aufgaben, drei Determinationen und zwar zur siebzehnten, zur neunzehnten und zur drei und zwanzigsten Aufgabe; alle drei sind Minima.

Ueber Berührungen.

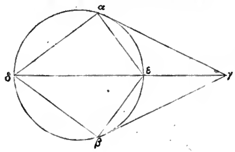
Erstes Buch.

Zur fünften Aufgabe. Hat man die [*Command. XCVI.*] beiden Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, welche der Kreis $\varepsilon\zeta$ in den Punkten ε, ζ berührt, und zieht $\varepsilon\zeta$, so ist $\varepsilon\zeta$ der Durchmesser des Kreises $\varepsilon\zeta$.



Man nehme auf der Peripherie des Kreises die Punkte η, ϑ an und ziehe $\varepsilon\eta$, $\eta\zeta$, $\varepsilon\vartheta$, $\vartheta\zeta$. Da nun $\alpha\varepsilon$ eine Tangente, $\varepsilon\zeta$ eine Sehne ist, so ist $\angle\,\alpha\varepsilon\zeta$ dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt gleich, also $= \angle\,\varepsilon\vartheta\zeta$. Aus demselben Grunde ist $\angle\,\delta\zeta\varepsilon = \angle\,\varepsilon\eta\zeta$. Mithin ist $\angle\,\varepsilon\vartheta\zeta = \angle\,\varepsilon\eta\zeta$, und da sie zusammen $= 2\,R$, so ist jeder $= R$, folglich sind $\varepsilon\vartheta\zeta$, $\varepsilon\eta\zeta$ Halbkreise. Daher ist $\varepsilon\zeta$ ein Durchmesser des Kreises $\varepsilon\zeta$, was zu beweisen war.

Hat man den Kreis $\alpha\beta\delta$, an den $\beta\gamma$, [*Command. XCVII.*] $\gamma\alpha$ Tangenten sind, und wird der Winkel γ durch $\gamma\delta$ halbirt, so liegt auf $\gamma\delta$ der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta\delta$.



Man ziehe die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$. Da nun $\alpha\gamma$ eine Tangente, $\gamma\delta$

νία τῇ ὑπὸ αεγ γωνίᾳ. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ δβγ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βεγ γωνίᾳ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ εαγ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ γωνία· καὶ ἡ ὑπὸ δαε ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δβε γωνίᾳ. ὥστε ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν. διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ δε τοῦ αβδ κύκλου· ἐπὶ τῆς γδ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ αβδ κύκλου.

Εἰς τὸ ιβ. Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αβγ, ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ τοῦ αβ κύκλου κέντρον· ὅτι καὶ τοῦ βγ κύκλου κέντρον ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβγ. Ἤχθω γὰρ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφαπτομένη ἡ δβε· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ δβγ ἐστὶν ὀρθή, καὶ ἐφάπτεται ἡ δε τοῦ βγ κύκλου. τὸ ἄρα κέντρον τοῦ βγ κύκλου ἐστὶν ἐπὶ τῆς γβ, ὁμοίως καὶ τοῦ αβ.

Ἄλλως. Ἔστωσαν πάλιν αἱ αβ, βγ κύκλων διάμετροι· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω πάλιν ἐφαπτομένη ἡ τοῦ αβ κύκλου ἡ δε· ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία, καὶ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ δβγ γωνία ὀρθή ἐστιν. καὶ ἔστιν ἐν ἑκατέρᾳ [τῶν αβ, βγ] κέντρον τῶν αβ, βγ κύκλων· ἡ δε ἄρα ἐπάπτεται τοῦ βγ κύκλου. ἀλλὰ καὶ τοῦ αβ κατ' αὐτὸ τὸ β. καὶ ὁ αβ ἄρα τοῦ βγ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

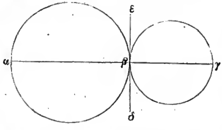
Δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβ, βγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ αγβ, ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον τοῦ αβ κύκλου· ὅτι καὶ τοῦ βγ τὸ κέντρον ἐστὶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἤχθω ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ἡ δε. ἐπεὶ οὖν ἐφαπτομένη ἡ δε τοῦ αβ κύκλου, καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἡ αβ, ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία. καὶ ἦκται ἀπὸ τῆς ἁφῆς τῆς β ἡ βγ, ἐπὶ τῆς βγ [1])

---

[1]) So emendirt *Commandin* diese Stelle; die Hdsch. haben: ἀπὸ τῆς ἁφῆς τῆς β ἐπὶ τὴν βγ. τὸ κέντρον ἄρα.

aber den Kreis schneidet, so ist Rechteck $\delta\gamma . \gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\gamma\alpha$, mithin ist $\angle \delta\alpha\gamma = \angle \alpha\varepsilon\gamma$. Aus demselben Grunde ist $\angle \delta\beta\gamma = \angle \beta\varepsilon\gamma$. Aber es ist $\angle \varepsilon\alpha\gamma = \angle \varepsilon\beta\gamma$, mithin auch $\angle \delta\alpha\varepsilon = \angle \delta\beta\varepsilon$, folglich ist jeder = R. Daher ist $\delta\varepsilon$ ein Durchmesser des Kreises $\alpha\beta\delta$ und es liegt auf $\gamma\delta$ der Mittelpunkt desselben.

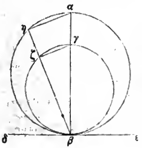
Zur zwölften Aufgabe. Berühren sich [*Command. XCVIII.*] die beiden Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ im Punkte β, zieht man die Linie $\alpha\beta\gamma$, und ist auf ihr der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$, so liegt auch der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ auf derselben Linie $\alpha\beta\gamma$.



Zieht man die beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente $\delta\beta\varepsilon$, so ist $\angle \alpha\beta\delta$ = R, mithin der Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$ ebenfalls = R; nun berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\beta\gamma$, folglich liegt der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ auf $\gamma\beta$, so wie auch der des Kreises $\alpha\beta$.

Umgekehrt Sind $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ Durchmesser [*Command. XCIX.*] von Kreisen, so berühren die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ einander.

Zieht man wiederum die Tangente $\delta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist $\angle \alpha\beta\delta$ = R, mithin auch sein Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$ = R. Nun liegt auf jedem der Durchmesser $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ der Mittelpunkt der Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, mithin berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\beta\gamma$. Sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ in demselben Punkte β, folglich berührt der Kreis $\alpha\beta$ den Kreis $\beta\gamma$ in dem Punkte β, nach derselben Figur wie zu dem vorhergehenden Satze.



Berühren die beiden [*Command. C.*] den Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ einander im Punkte β, und zieht man die Linie $\alpha\gamma\beta$, auf welcher der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ liegt, so liegt auch der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ auf derselben Linie $\beta\gamma$.

Es sei $\delta\varepsilon$ die Tangente der Kreise. Da nun $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta$ berührt und $\alpha\beta$ durch den Mittelpunkt geht, so ist $\angle \delta\beta\gamma$ = R. Es ist aber $\beta\gamma$ vom

ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βγ κύκλου. φανερὸν δὲ καὶ οὕτως· εἰ γὰρ διαχθῇ ἡ βζη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, αη, γένοιτο ἂν ἴση ἡ ὑπὸ δβζ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ τῶν βαη, βγζ γωνίᾳ· [ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ γζβ γωνία τῇ αηβ γωνίᾳ] [1]) καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αηβ γωνία, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βζγ γωνία· ὥστε ἐπὶ τῆς βγ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βγ. καὶ ὁμοίως κἂν τοῦ βγ δοθῇ ἐπὶ τῆς αβ, δείξομεν ὅτι καὶ τοῦ αβ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν διάμετροι αἱ αβ, βγ· ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἤχθω τοῦ αβ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ δβε· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ βγ· ἡ δὲ ἄρα ἐφαπτομένη τοῦ βγ κύκλου κατὰ τὸ β σημεῖον. εἰ γὰρ ἐκβληθείη ἡ γζ ἐπὶ τὸ δ, γένοιτο ἂν τὸ ὑπὸ γδζ ἴσον τῷ ἀπὸ δβ, διὰ τὸ ὀρθὴν γίνεσθαι τὴν πρὸς τῷ ζ γωνίαν, οὔσης τῆς πρὸς τῷ β ὀρθῆς. [2]) ἀλλὰ γὰρ καὶ τοῦ αβ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ β· καὶ ὁ αβ ἄρα κύκλος τοῦ βγ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ β, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς.

Εἰς τὸ ις. Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ αβγ, δεβ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ β διήχθωσαν αἱ γβδ, αβε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δε· ὅτι παράλληλοι αἱ αγ, δε. Ἤχθω γὰρ τῶν κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη κατὰ τὸ β σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία τῇ ὑπὸ αγβ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηβε γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αβζ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηβε γωνίᾳ· καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδβ γωνίᾳ· καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει: —

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) Diese Stelle von εἰ γὰρ ἐκβληθείη — πρὸς τῷ β ὀρθῆς hat *Commandin* als eine eingeschaltete Glosse in seiner Uebersetzung ausgelassen. *Cammerer* hat daraus, offenbar etwas kühn, einen ganzen Beweis nach Art des früheren construirt.

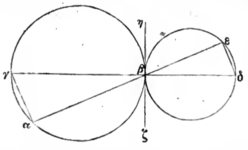
Berührungspunkt β gezogen, folglich liegt auf $\beta\gamma$ der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$.

Der Beweis kann offenbar auch auf folgende Weise geführt werden. Zieht man nämlich die Linie $\beta\zeta\eta$, und $\gamma\zeta$, $\alpha\eta$, so wird $\angle\,\delta\beta\zeta = \angle\,\beta\alpha\eta = \angle\,\beta\gamma\zeta$; mithin $\angle\,\gamma\zeta\beta = \angle\,\alpha\eta\beta$. Nun ist $\angle\,\alpha\eta\beta = R$, daher auch $\angle\,\beta\zeta\gamma = R$; folglich liegt auf $\beta\gamma$ der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$. Auf gleiche Weise wird der Beweis geführt, dass wenn der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ auf $\alpha\beta$ angenommen wird, auch der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ darauf liegt.

Sind andererseits $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ Durchmesser, so [*Command. CI.*] berühren die Kreise einander.

Zieht man die Tangente $\delta\beta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist $\angle\,\alpha\beta\varepsilon = R$; nun ist $\beta\gamma$ ein Durchmesser, mithin ist $\delta\varepsilon$ die Tangente des Kreises $\beta\gamma$ im Punkte β. Aber sie berührt auch den Kreis $\alpha\beta$ im Punkte β; mithin berührt der Kreis $\alpha\beta$ den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β, nach derselben Figur wie zum vorhergehenden Satze.

Zur sechzehnten Aufgabe. Berühren die [*Command. CII.*] Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\beta$ einander im Punkte β, zieht man durch β die Linien $\gamma\beta\delta$, $\alpha\beta\varepsilon$ und ferner $\alpha\gamma$, $\delta\varepsilon$, so ist $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$.



Man ziehe die beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente $\zeta\eta$ des Punktes β. Da nun $\beta\zeta$ eine Tangente, $\beta\alpha$ eine Sehne ist, so ist $\angle\,\alpha\beta\zeta = \angle\,\alpha\gamma\beta$, uud aus demselben Grunde $\angle\,\eta\beta\varepsilon = \angle\,\varepsilon\delta\beta$. Es ist aber $\angle\,\alpha\beta\zeta = \angle\,\eta\beta\varepsilon$, daher $\angle\,\alpha\gamma\beta = \angle\,\varepsilon\delta\beta$; sie sind zugleich Wechselwinkel, mithin $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$, was zu beweisen war.

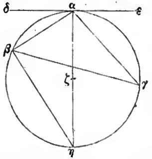
Κύκλος ο αβγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γα, καὶ ἀπὸ τοῦ α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αβγ γωνίαν τῇ ὑπὸ εαγ γωνίᾳ· ὅτι ἐφάπτεται ἡ δε τοῦ αβ κύκλου κατὰ τὸ α σημεῖον. Εἰ μὲν οὖν ἡ αγ διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ, φανερὸν ἔσται· γίνεται γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εαγ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν β γωνίαν εἶναι ὀρθήν· τοῦτο δὲ προδέδεικται. εἰ δὲ μὴ, ἔστω τὸ κέντρον τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βη. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ εαγ γωνία τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ ηαγ γωνία ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ηβγ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εαη γωνία τῇ ὑπὸ αβη γωνίᾳ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβη, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εαη· καὶ ἔστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἡ αζ. ἐφαπτομένη ἄρα ἡ δε τοῦ αβγ κύκλου. τοῦτο γὰρ προγέγραπται.

Τούτου ὄντος ἀνάστροφον τοῦ πρὸ αὐτοῦ. Παραλλήλου οὔσης τῆς αγ τῇ δε, δεῖξαι ὅτι ἐφαπτόμενοι οἱ αβγ, δεβ ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. Ἤχθω πάλιν τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία τῇ γ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αβζ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εβη, ἡ δὲ γ τῇ δ ἐναλλὰξ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ ηβε γωνία τῇ δ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ἐφάπτεται ἡ ζη τοῦ δβε κύκλου· ἀλλὰ καὶ τοῦ αβγ κατὰ τὸ β· καὶ ὁ αβγ ἄρα κύκλος τοῦ βδε κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ β σημεῖον.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ αβγ, καὶ δοθέντων τῶν δ, ε, ἀπὸ τῶν δ, ε ἐὰν κλασθῇ [1]) ἡ δβε καὶ ἐκβληθῇ, ποιεῖν παράλληλον τὴν αγ τῇ δε. Γεγονέτω· καὶ

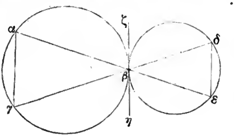
[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἂν δοθῇ.

Werden in dem Kreise $\alpha\beta\gamma$ die Linien [*Command. CIII.*] $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und von α die beliebige Gerade $\alpha\varepsilon$ gezogen, so dass $\angle\,\alpha\beta\gamma = \angle\,\varepsilon\alpha\gamma$, so berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis im Punkte α.



Geht $\alpha\gamma$ durch den Mittelpunkt, so ist der Beweis ohne Schwierigkeit, denn $\angle\,\varepsilon\alpha\gamma = R$, weil $\angle\,\beta = R$. Hiermit ist der Satz Früherem zufolge dargethan. Geht aber $\alpha\gamma$ nicht durch den Mittelpunkt, und ist ζ der Mittelpunkt, so ziehe man $\alpha\zeta$, verlängere sie bis η, und verbinde β, η. Alsdann ist $\angle\,\alpha\beta\eta = R$. Da nun $\angle\,\varepsilon\alpha\gamma = \angle\alpha\beta\gamma$, $\angle\,\eta\alpha\gamma = \angle\eta\beta\gamma$ als Winkel in demselben Kreisabschnitt, so ist $\angle\varepsilon\alpha\eta = \angle\,\alpha\beta\eta$; aber $\angle\,\alpha\beta\eta = R$, folglich auch $\angle\,\varepsilon\alpha\eta = R$. Nun verbindet $\alpha\zeta$ den Mittelpunkt mit α, mithin ist $\delta\varepsilon$ Tangente des Kreises $\alpha\beta\gamma$ dem zufolge, was früher bewiesen ist.

Auf Grund dessen kann die Umkehrung [*Command. CIV.*] des früheren Satzes bewiesen werden. Ist $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$, so werden die Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\beta$ einander im Punkte β berühren.



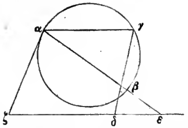
Zieht man wiederum die Tangente $\zeta\eta$ des Kreises $\alpha\beta\gamma$, so ist $\angle\,\alpha\beta\zeta = \angle\gamma$, aber $\angle\,\alpha\beta\zeta = \angle\,\varepsilon\beta\eta$, und $\angle\gamma = \angle\,\delta$ als Wechselwinkel, mithin $\angle\,\eta\beta\varepsilon = \angle\,\delta$. Dem Vorausgegangenen zufolge berührt alsdann $\zeta\varepsilon$ den Kreis $\delta\beta\varepsilon$; aber $\zeta\varepsilon$ berührt auch den Kreis $\alpha\beta\gamma$ im Punkte β, folglich berührt der Kreis $\alpha\beta\gamma$ den Kreis $\beta\delta\varepsilon$ im Punkte β.

Eine Aufgabe zu ebenderselben. Sind [*Command. CV.*] der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die Punkte δ, ε der Lage nach gegeben, es sollen von δ, ε aus nach einem Punkt der Peripherie die Linien $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$ gezogen und bis α, γ verlängert werden, so dass $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$ wird.

ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ζα. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ἡ αγ τῇ δε, ἴση ἐστὶν ἡ γ γωνία τῇ ὑπὸ γδε γωνίᾳ· ἀλλὰ ἡ γ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζαε, ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει, καὶ ἡ ὑπὸ ζαε ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδε. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ α, β, δ, ζ σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ ζεδ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αεβ, ἴσον γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δεζ. καὶ δοθεῖσα ἡ δε, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ εζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ [δὴ] δεδομένου σημείου τοῦ ζ θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ αβγ ἐφαπτομένη εὐθεῖα¹) ἦκται ἡ ζα· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ζα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ζ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ α. ἀλλὰ καὶ τὸ ε δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ αε. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθὲν ἄρα τὸ β σημεῖον· ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν, δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δβ, βε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ δ, ε· [καὶ] κείσθω τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ε ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς δε καὶ ἄλλης τινὸς τῆς εζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δβ ἐκβεβήσθω ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αγ τῇ δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ζεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ ζεδ· ἐν κύκλῳ [ἄρα ἐστὶ τὰ α, β, δ, ζ σημεῖα],²) ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζαε γωνία τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαε γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βδε γωνίᾳ· καὶ εἰσὶν ἐνναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ δε.

Εἰς τὸ ιδ. Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ αβγ, αεδ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ α σημεῖον, καὶ διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ α εὐθεῖαι αἱ αδβ, αεγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, βγ· ὅτι παρ-

¹) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἐφάπτεται πρὸς εὐθεῖαν.
²) Einschaltung von *Commandin*.



Es sei geschehen. Man ziehe die Tangente $\zeta\alpha$. Da nun $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$, so ist $\angle \gamma = \angle \gamma\delta\varepsilon$, aber $\angle \gamma = \angle \zeta\alpha\varepsilon$ als Winkel zwischen Tangente und Sehne, mitbin $\angle \zeta\alpha\varepsilon = \angle \gamma\delta\varepsilon$. Daher liegen die Punkte α, β, δ, ζ auf der Peripherie eines Kreises, und es ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$. Nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ gegeben, denn es ist dem Quadrat über der Tangente gleich, mithin ist auch Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ gegeben. Es ist aber $\delta\varepsilon$ gegeben, folglich auch $\varepsilon\zeta$. Aber sie ist auch der Lage nach gegeben, und da der Punkt ε gegeben ist, so ist auch ζ gegeben. Von dem gegebenen Punkt ζ ist nun an den der Lage nach gegebenen Kreis $\alpha\beta\gamma$ die Tangente $\zeta\alpha$ gezogen; es ist also $\zeta\alpha$ der Lage und der Grösse nach gegeben, und da der Punkt ζ gegeben ist, so ist auch α gegeben. Aber es ist auch der Punkt ε gegeben, mithin ist $\alpha\varepsilon$ der Lage nach gegeben. Nun ist der Kreis der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt β. Es ist aber ein jeder der Punkte δ, ε gegeben, mithin auch eine jede der Linien $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$ der Lage nach.

Synthesis. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die beiden Punkte δ, ε gegeben, und es sei das Quadrat über der Tangente gleich dem Rechteck aus $\delta\varepsilon$ und irgend einer andern Linie $\varepsilon\zeta$. Man ziehe von ζ an den Kreis $\alpha\beta\gamma$ die Tangente $\zeta\alpha$, ferner $\alpha\varepsilon$ und $\delta\beta$ und verlängere sie bis γ, und ziehe $\alpha\gamma$, so ist $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$. Denn da Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über der Tangente, aber auch Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über der Tangente, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$. Mithin liegen die Punkte α, β, δ, ζ auf der Peripherie eines Kreises, folglich $\angle \zeta\alpha\varepsilon = \angle \beta\delta\varepsilon$; aber $\angle \zeta\alpha\varepsilon = \angle \alpha\gamma\beta$ als Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt, daher $\angle \alpha\gamma\beta = \angle \beta\delta\varepsilon$, und da sie Wechselwinkel sind, so ist $\alpha\gamma \parallel \delta\varepsilon$.

Zur vierzehnten Aufgabe. Berühren sich [*Command. CVI.*] die beiden Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\varepsilon\delta$ im Punkte α, und zieht man von α die Linien $\alpha\delta\beta$, $\alpha\varepsilon\gamma$, und verbindet $\delta\varepsilon$, $\beta\gamma$, so ist $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$.

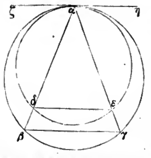
ἀλλήλοί εἰσιν αἱ δε, βγ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ ζαβ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ αγβ, αεδ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αγβ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεδ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ δε τῇ βγ. [ἀλλὰ παράλληλος ἔστω ἡ δε τῇ βγ][1]), ὅτι ἐφάπτονται οἱ αβγ, αδε κύκλοι ἀλλήλων. ἤχθω γὰρ τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ζη· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζαδ γωνία τῇ γ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ γ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ε, καὶ ἡ ὑπὸ ζαδ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ε γωνίᾳ, ὥστε ἐφαπτομένη ἡ ζη τοῦ αδε κύκλου· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. Θέσει δοθέντος[2]) κύκλου τοῦ αβγ, καὶ δύο δοθέντων τῶν δ, ε, κλᾶν τὴν δαε καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω· καὶ ἀπὸ τοῦ β ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ, ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ ζβγ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ δζβ, τῇ α. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ, ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς βζ δοθείσης· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ δε, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ δ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δοθέντος σημείου τοῦ ζ, τῇ θέσει δὲ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένη ἧκται ἡ ζβ· δέδοται ἄρα ἡ ζβ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ὁ αβγ κύκλος θέσει· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ β σημεῖον· ἔστι δὲ καὶ τὸ δ δοθέν, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ βδ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ α. ἔστι δὲ καὶ τὸ ε δοθέν, δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ· καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ αβγ κύκλου [ἐφαπτομένη] εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ζβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, [καὶ] ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, βγ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ βγ τῇ δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ εδζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, [ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ αδβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ. ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ α, β, ζ, ε σημεῖα][3]), ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ α γωνία, τουτέστιν ἡ

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) Die Hdsch. haben *ὄντος.*

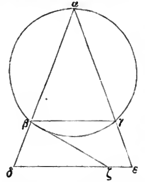
[3]) Einschaltung von *Commandin.*



Zieht man durch α die Tangente, $\zeta\eta$, so ist $\angle \zeta\alpha\beta = \angle \alpha\gamma\beta = \angle \alpha\varepsilon\delta$, demnach $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$.

Wird aber $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$ vorausgesetzt, so berühren die Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\varepsilon$ einander. Denn zieht man an den Kreis $\alpha\beta\gamma$ die Tangente $\zeta\eta$, so ist $\angle \zeta\alpha\delta = \angle \gamma$, aber $\angle \gamma = \angle \varepsilon$, folglich $\angle \zeta\alpha\delta = \angle \varepsilon$, daher ist $\zeta\varepsilon$ auch eine Tangente des Kreises $\alpha\delta\varepsilon$, wie dies früher bewiesen ist.

Eine Aufgabe zu ebenderselben. Es [*Command.* C*VII.*] sind der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die beiden Punkte δ, ε der Lage nach gegeben, es sollen von den Punkten δ, ε bis zu einem Punkt α der Peripherie die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ gezogen werden, so dass $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$.



Es sei geschehen. Man ziehe von dem Punkt β die Tangente $\beta\zeta$ an den Kreis. Da nun $\beta\zeta$ eine Tangente, $\beta\gamma$ eine Sehne ist, so ist $\angle \zeta\beta\gamma$ d. h. $\angle \delta\zeta\beta = \angle \alpha$. Mithin liegen die Punkte α, β, ε, ζ auf der Peripherie eines Kreises, folglich Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta =$ Rechteck $\varepsilon\delta.\delta\zeta$. Nun ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ gegeben, denn es ist dem Quadrat über der gegebenen $\beta\zeta$ gleich, daher ist auch Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta$ gegeben. Es ist aber $\delta\varepsilon$ gegeben, folglich auch $\delta\zeta$. Aber sie ist auch der Lage nach gegeben, und da der Punkt δ gegeben ist, so ist auch ζ gegeben. Von dem gegebenen Punkt ζ ist nun an den der Lage nach gegebenen Kreis die Tangente $\zeta\beta$ gelegt. Es ist also $\zeta\beta$ der Lage nach gegeben; aber es ist auch der Kreis $\alpha\beta\gamma$ der Lage nach gegeben, mithin auch der Punkt β. Nun ist der Punkt δ gegeben, mithin ist $\beta\delta$ der Lage nach gegeben. Es ist aber der Kreis der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt α, und da der Punkt ε gegeben ist, so ist eine jede der Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ der Lage nach gegeben.

Synthesis. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die Punkte δ, ε gegeben und es sei Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta$ dem Quadrat über der Tangente

ὑπὸ γβζ, ἐφάπτεται γὰρ ἡ βζ, τέμνει δὲ ἡ βγ, τῇ ὑπὸ βζδ· καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ, [παράλληλος] ἄρα ἐστὶν ἡ βγ τῇ δε.

Πρόβλημα εἰς τὸ $\overline{\iota\eta}$. *Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ αβγ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν δ, ε, ἀπὸ τῶν δ, ε κλᾶν τὴν δαε καὶ ποιεῖν τὴν δε παράλληλον τῇ βγ. Γεγονέτω· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἡ βζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ γ, τουτέστι τῇ ε· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ β, ζ, α, ε σημεῖα· τὸ ἄρα ὑπὸ βδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζδε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ βδα, ἀπὸ γὰρ δοθέντος τοῦ δ εἰς θέσει δεδομένον κύκλον*[1] *διῆκται ἡ αδβ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ζδε. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ δε, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζδ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ δ, [δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ δεδομένου σημείου τοῦ ζ θέσει δεδομένου]*[2] *κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ζβ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ζβ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος, δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ β σημεῖον. ἀλλὰ καὶ τὸ δ δοθὲν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ βδ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος, δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ α σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν δ, ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ὁ μὲν τῇ θέσει δεδομένος κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ αδβ, καὶ τῷ ὑπὸ αδβ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδζ, τουτέστι τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γεα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβδ γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἐν κύκλῳ γάρ ἐστι τὰ α, β, ε, ζ σημεῖα· ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζβδ ἴση ἐστὶ τῇ γ, ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει· καὶ ἡ γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ε· παράλληλος ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ δε. ὅπερ ἔδει: —*

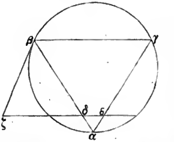
---

[1] So emendirt *Cammerer*, die Hdsch. haben *δεδομένην γωνίαν.*

[2] Einschaltung von *Commandin.*

gleich. Von dem Punkt ζ lege man eine Tangente $\zeta\beta$ an den Kreis $\alpha\beta\gamma$, ziehe $\delta\beta$ und verlängere sie bis α, und ziehe $\alpha\varepsilon$, $\beta\gamma$, so ist $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$. Denn da Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta$ gleich dem Quadrat über der Tangente, aber auch Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ dem Quadrat über der Tangente gleich ist, so ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta =$ Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta$; es liegen also die Punkte α, β, ζ, ε auf der Peripherie eines Kreises, mithin ist $\angle\, \alpha$ d. h. $\angle\, \gamma\beta\zeta = \angle\, \beta\zeta\delta$, weil $\beta\zeta$ eine Tangente und $\beta\gamma$ eine Sehne ist, und da sie Wechselwinkel sind, so ist $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$.

Eine Aufgabe zur achtzehnten. Es [*Command. CVIII.*] sind der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die Punkte δ, ε der Lage nach gegeben; es sollen von δ, ε nach einem Punkt α der Peripherie die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ gezogen werden, so dass $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$.



Es sei geschehen. Man lege von β aus an den Kreis $\alpha\beta\gamma$ die Tangente $\beta\zeta$, so ist $\angle\, \zeta\beta\delta = \angle\, \gamma = \angle\, \varepsilon$. Mithin liegen die Punkte β, ζ, α, ε auf der Peripherie eines Kreises, folglich Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\alpha =$ Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\varepsilon$. Es ist aber Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\alpha$ gegeben, denn von dem gegebenen Punkt δ ist durch den der Lage nach gegebenen Kreis die Linie $\alpha\delta\beta$ gelegt, mithin ist auch Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ gegeben. Nun ist $\delta\varepsilon$ gegeben, folglich auch $\zeta\delta$. Da aber der Punkt δ gegeben ist, so ist es auch ζ. Von diesem gegebenen Punkt ζ ist nun an den der Lage nach gegebenen Kreis die Tangente $\zeta\beta$ gezogen, mithin ist $\zeta\beta$ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch der Kreis der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt β. Da nun der Punkt δ gegeben, so ist auch $\beta\delta$ der Lage nach gegeben. Da ferner der Kreis der Lage nach gegeben, so ist es auch der Punkt α, mithin ist, da ein jeder der Punkte δ, ε gegeben, auch eine jede der Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ der Lage nach gegeben.

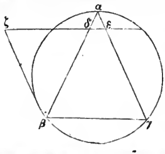
Synthesis. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die beiden Punkte δ, ε der Lage nach gegeben. Man ziehe die beliebige Linie $\alpha\delta\beta$, und es sei Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta =$ Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta$, d. h. man lege an den Kreis $\alpha\beta\gamma$ die Tangente $\beta\zeta$, und ziehe die Linie $\gamma\varepsilon\alpha$. Da nun $\angle\, \zeta\beta\delta = \angle\, \varepsilon$, denn die Punkte α, β, ε, ζ liegen auf der Peri-

Πρόβλημα εἰς τὸ $\overline{\iota\vartheta}$. Θέθει δοθέντος τοῦ αβγ κύκλου, [καὶ] δύο δοθέντων [σημείων] τῶν δ, ε, κλᾶν [ἀπὸ] δοθέντων [τῶν δ, ε] τὴν δαε, ὥστε παράλληλον εἶναι τὴν βγ τῇ δε. Γεγονέτω· καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ βζ. γίνεται οὖν πάλιν ἐν κύκλῳ τὰ α, ζ, β, ε σημεῖα, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αδβ τῷ ὑπὸ εδζ· δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αδβ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ δε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ δ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ζ, ὥστε θέσει ἡ βζ. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ β. ἀλλὰ καὶ τὰ δ, ε, δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δα, αε. ὁμοίως γὰρ τοῖς πρότερον δείξομεν, καὶ ὁμοίως ἡ σύνθεσις τῷ πρὸ αὐτοῦ.

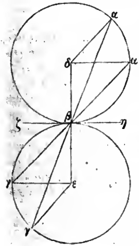
Εἰς τὸ $\overline{\kappa\delta}$. Ἀπτέσθωσαν δύο κύκλοι ἀλλήλων οἱ αβ, αγ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα αὐτῶν τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ, γε, εβ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ αδ τῇ γε· ὅτι εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ διὰ τῶν δβε, αβγ. Ἤχθω γὰρ τῶν αβ, βγ κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ζη. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ζη, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ δβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν δβζ γωνία. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ ζβε γωνία ἐστὶν ὀρθή. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν δβε. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αδ τῇ δβ, ἡ δὲ εγ τῇ εβ, ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ εγ πρὸς τὴν εβ· καὶ περὶ ἴσας γωνίας δ, ε αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβα γωνία τῇ ὑπὸ γβε. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ δβε, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ διὰ τῶν αβγ. ὅπερ: —

pherie eines Kreises, aber auch $\angle \zeta\beta\delta = \angle\gamma$, denn $\zeta\beta$ ist eine Tangente und $\beta\alpha$ eine Sehne, so ist $\angle\gamma = \angle\varepsilon$, mithin $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$, was zu beweisen war.

Eine Aufgabe zur neunzehnten. Es sei [*Command. CIX.*] der Kreis $\alpha\beta\gamma$, und die beiden Punkte δ, ε der Lage nach gegeben; es sollen von δ, ε nach einem Punkt der Peripherie die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ gezogen werden, so dass $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$.



Es sei geschehen. Man ziehe die Tangente $\beta\zeta$. Nun liegen die Punkte α, ζ, β, ε auf der Peripherie eines Kreises, und es ist Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\beta$ = Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta$. Es ist aber Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\beta$ gegeben, folglich auch Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta$. Nun ist $\delta\varepsilon$ gegeben, mithin auch $\delta\zeta$; aber sie ist auch der Lage nach gegeben, mithin ist, da der Punkt δ gegeben, auch der Punkt ζ gegeben, daher auch $\beta\zeta$ der Lage nach. Nun ist der Kreis gegeben, folglich auch der Punkt β. Da aber die Punkte δ, ε gegeben sind, so ist auch eine jede der Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ gegeben. Auf gleiche Weise wie früher wird der Beweis geführt und ebenso geschieht auch die Synthesis.



Zur vier und [*Command. CX.*] zwanzigsten Aufgabe. Berühren die beiden Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ einander im Punkte β, sind die Mittelpunkte derselben δ, ε, und zieht man $\alpha\delta$, $\delta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\beta$; ist ferner $\alpha\delta \parallel \gamma\varepsilon$, so sind die Linien $\delta\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ gerade Linien.

Zieht man die Tangente $\zeta\eta$ der Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, so ist, da $\delta\beta$ den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt verbindet, $\angle \delta\beta\zeta$ = R. Ebenso ist $\angle \zeta\beta\varepsilon$ = R. Folglich ist die Linie $\delta\beta\varepsilon$ eine gerade. Da ferner $\alpha\delta = \delta\beta$, $\varepsilon\gamma = \varepsilon\beta$, so ist $\alpha\delta : \delta\beta = \varepsilon\gamma : \varepsilon\beta$, und da $\angle\delta = \angle\varepsilon$, so ist $\angle \delta\beta\alpha$ =

Εἰς τὸ $\overline{κε}$. Ἴσης οὔσης τῆς μὲν αβ τῇ βγ, τῆς δὲ αδ τῇ δε, καὶ παραλλήλου οὔσης τῆς δε τῇ βγ· δεῖξαι ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν α, ε, γ σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ, καὶ τῇ αε παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εδ ἐπὶ τὸ ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δζ τῇ δβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αδ τῇ δε ἴση· ὅλη ἄρα ἡ αβ ὅλῃ τῇ ζε ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ αβ τῇ βγ ἴση ἐστὶν, καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ ζε ἐστὶν ἴση· ἀλλὰ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ γε ἄρα τῇ βζ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ αε τῇ βζ παράλληλός ἐστιν. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ αεγ· τοῦτο γὰρ φανερόν.

Εἰς τὸ $\overline{λα}$. Ἐὰν ᾖ κύκλος ὁ αβγ, καὶ δύο προβληθῶσιν αἱ βδ, δγ ἴσαι οὖσαι, ἡ δὲ βδ ἐφάπτεται· ὅτι καὶ ἡ δγ ἐφάπτεται. Τοῦτο δὲ φανερόν· ἂν γὰρ διαχθῇ ἡ δα, τὸ ὑπὸ αδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δβ· ἀλλὰ τὸ ἀπὸ δβ τῷ ἀπὸ δγ ἴσον ἐστὶν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδε ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δγ. ἐφάπτεται ἄρα ἡ δγ τοῦ αβγ κύκλου.

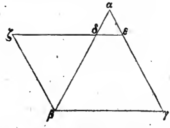
Δύο κύκλοι οἱ αβ, βγ, καὶ διὰ τοῦ β διήχθω τις ἡ αβγ, καὶ δύο παράλληλοι αἱ αδ, εγ νεύουσαι ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων· ὅτι οἱ αβ, βγ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, βε· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν δβε· παράλληλος γάρ[1]*) ἐστιν ἡ αδ τῇ γε, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς δβ οὕτως ἡ γε πρὸς εβ· καὶ γίνεται δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν α τῇ γ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς δ, ε τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία τῇ ὑπὸ γβε. καὶ ἐστὶν εὐθεῖα ἡ αβγ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δβε. ἐπεὶ δὲ εὐθεῖα*

---

[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben *ἄρα*.

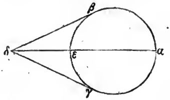
$\angle \gamma\beta\varepsilon$. Nun ist die Linie $\delta\beta\varepsilon$ eine gerade, mithin auch die Linie $\alpha\beta\gamma$, was zu beweisen war.

Zur fünf und zwanzigsten Aufgabe. Ist [*Command. CXI.*] $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\alpha\delta = \delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$, so ist die Linie, die durch die Punkte α, ε, γ geht, eine gerade Linie.

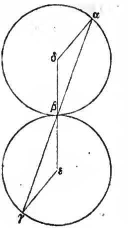


Man ziehe $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$, und $\alpha\varepsilon \parallel \beta\zeta$, und es werde $\varepsilon\delta$ bis ζ verlängert. Alsdann ist $\delta\zeta = \delta\beta$. Es ist aber $\alpha\delta = \delta\varepsilon$, folglich $\alpha\beta = \zeta\varepsilon$. Nun ist $\alpha\beta = \beta\gamma$, mithin auch $\beta\gamma = \zeta\varepsilon$. Aber es ist auch $\beta\gamma \parallel \zeta\varepsilon$, daher $\gamma\varepsilon = \beta\zeta$. Da nun $\alpha\varepsilon \parallel \beta\zeta$, so ist offenbar die Linie $\alpha\varepsilon\gamma$ eine gerade Linie.

Zur ein und dreissigsten Aufgabe. Gehen von dem Kreise $\alpha\beta\gamma$ die gleichen Linien $\beta\delta$, $\delta\gamma$ aus, von welchen $\beta\delta$ eine Tangente ist, so ist auch $\delta\gamma$ eine Tangente. [*Command. CXII.*]



Dies erhellt ohne Schwierigkeit; denn zieht man $\delta\alpha$, so ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\beta$, aber Quadrat über $\delta\beta$ = Quadrat über $\delta\gamma$, mithin Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\gamma$, folglich berührt $\delta\gamma$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$.



Hat man die [*Command. CXIII.*] Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und zieht durch β die Linie $\alpha\beta\gamma$, gehen ferner $\alpha\delta$, $\gamma\varepsilon$ zu den Mittelpunkten der Kreise, und ist $\alpha\delta \parallel \varepsilon\gamma$, so berühren die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ einander im Punkte β.

Sind δ, ε die Mittelpunkte der Kreise, und zieht man $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$, so ist $\delta\beta\varepsilon$ eine gerade Linie, denn $\alpha\delta \parallel \gamma\varepsilon$ und $\alpha\delta : \delta\beta = \gamma\varepsilon : \varepsilon\beta$, mithin sind in den beiden Dreiecken die Winkel γ, α einander gleich und die die Winkel δ, ε einschliessenden Seiten stehen in Proportion; daher sind die Dreiecke gleichwink-

ἐστὶν ἡ διὰ τῶν κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς, ἐφάπτονται ἄρα οἱ αβ, βγ κύκλοι ἀλλήλων κατὰ τὸ β σημεῖον. ὅπερ: —

Εἰς τὸ νβ. Ἔστω ὁ μὲν αβ τῇ γδ παράλληλος, ἴση δὲ ἡ αγ τῇ βδ, οὔσης ἀμβλείας μὲν τῆς ὑπὸ τῶν αγδ, ὀξείας δὲ τῆς ὑπὸ βδγ· ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αδ. Ἐπεὶ ἀμβλεῖα μέν ἐστιν ἡ ὑπὸ αγδ, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ βδγ, αἱ ἀπὸ τῶν α, β ἐπὶ τὴν γδ κάθετοι ἀγόμεναι, ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ α ἐκτὸς τοῦ γ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ β ἐντὸς τοῦ δ· πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ αε, βζ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αε τῇ βζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ τῇ γδ παράλληλος, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, ζ σημείοις γωνίαι. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζδ τῇ εγ, ὥστε καὶ ὅλη ἡ εζ τῇ γδ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ αβ ἄρα τῇ γδ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἴσοι κύκλοι οἱ αβ, δγ, καὶ διὰ τῶν κέντρων ἡ αδ, καὶ τῇ γδ παράλληλος ἡ εζ· λέγω ὅτι ἐκβληθεῖσα τέμνει καὶ τὸν αβ κύκλον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ η, θ, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ σημείων τῇ αδ ὀρθαὶ ἤχθωσαν αἱ ηκ, θλ, [καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ηκ τῇ θλ][1]), ἀλλὰ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ κλ τῇ ηθ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ὥστε ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς κ, λ γωνίαι. καὶ εἰσὶν ἐκ τῶν κέντρων αἱ ηκ, θλ· ἡ κλ ἄρα ἐφάπτεται τῶν κύκλων. φανερὸν οὖν ἡ τοῦ δγ ἐφαπτομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ αβ. ἡ ἄρα τὸν γδ τέμνουσα ἡ εζ καὶ τὸν αβ τέμνει, ἐκβληθεῖσα δὲ καὶ μεταξὺ τῶν β, λ ἔσται, ὡς ἡ εζ τῶν γ, κ ἐστὶ μεταξύ, ἡ εζ μείζων.

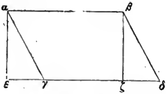
Ἔστω ἴση ἡ μὲν δα τῇ αε, μείζων δὲ ἡ βδ τῆς γε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε· ὅτι ἐκβληθεῖσα ἡ δε συμπίπτει τῇ βγ.

---

[1]) Einschaltung von *Cammerer* und von *Commandin*.

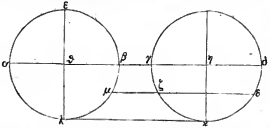
lig und es ist $\angle \alpha\beta\delta = \angle \gamma\beta\varepsilon$. Nun ist $\alpha\beta\gamma$ eine gerade Linie, folglich auch $\delta\beta\varepsilon$. Da also die Mittelpunkte und der gemeinsame Punkt in einer geraden Linie liegen, so berühren die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ einander im Punkte β, was zu beweisen war.

Zur zwei und funfzigsten Aufgabe. Ist [*Command. CXIV.*] $\alpha\beta \parallel \gamma\delta$, $\alpha\gamma = \beta\delta$, $\angle \alpha\gamma\delta > R$, $\angle \beta\delta\gamma < R$, so ist $\alpha\delta$ ein Parallelogramm.



Da $\angle \alpha\gamma\delta > R$, $\angle \beta\delta\gamma < R$, so werden die von α, β auf $\gamma\delta$ gefällten Senkrechten, und zwar die von α gefällte $\alpha\varepsilon$ ausserhalb γ, die von β gefällte $\beta\zeta$ innerhalb δ fallen. Nun ist $\alpha\varepsilon \parallel \beta\zeta$, aber es ist auch $\alpha\beta \parallel \gamma\delta$ und $\angle \varepsilon = \zeta = R$. Daher ist $\zeta\delta = \varepsilon\gamma$, mithin auch $\varepsilon\zeta = \gamma\delta$, folglich $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Hat man die beiden gleichen Kreise [*Command. CXV.*] $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, durch deren Mittelpunkte die Linie $\alpha\delta$ geht, und ist $\varepsilon\zeta \parallel \gamma\delta$, so schneidet auch $\varepsilon\zeta$ verlängert den Kreis $\alpha\beta$.



Man ziehe von η, ϑ, den Mittelpunkten der Kreise, die Linien $\eta\varkappa$, $\vartheta\lambda$ senkrecht auf $\alpha\delta$, und verbinde $\varkappa\lambda$. Alsdann ist $\eta\varkappa =$ und $\parallel \vartheta\lambda$, daher auch $\varkappa\lambda =$ und $\parallel \eta\vartheta$, mithin sind die Winkel bei $\varkappa$, λ rechte. Nun sind $\eta\varkappa$, $\vartheta\lambda$ Radien, folglich ist $\varkappa\lambda$ eine Tangente der Kreise. Offenbar berührt also die Tangente des Kreises $\delta\gamma$ auch den Kreis $\alpha\beta$. Daher schneidet die Linie $\varepsilon\zeta$, die den Kreis $\gamma\delta$ schneidet, auch den Kreis $\alpha\beta$; sie wird verlängert ihn zwischen β, λ treffen, wie $\varepsilon\zeta$ den Kreis $\gamma\delta$ zwischen γ, $\varkappa$ schneidet.

Ist $\delta\alpha = \alpha\varepsilon$, $\beta\delta = \gamma\varepsilon$ und zieht man [*Command. CXVI.*] $\delta\varepsilon$, so wird $\delta\varepsilon$ verlängert mit $\beta\gamma$ zusammentreffen.

Κείσθω τῇ γε ἴση ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ δε, καὶ συμπίπτει τῇ βγ· καὶ ἡ δε ἄρα συμπίπτει τῇ βγ.

Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. Θέσει δοθέντος[1]) *κύκλου τοῦ αβγ, [καὶ] τριῶν δοθέντων σημείων τῶν δ, ε, ζ ἐπ' εὐθείας, κλᾶν τὴν δαε*[2]) *καὶ ποιεῖν ἐπ' εὐθείας τὴν βγ τῇ γζ. Γεγονέτω, καὶ διὰ τοῦ β τῇ δζ παράλληλος ἤχθω ἡ βη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, [καὶ] ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ θ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βηγ γωνία, τουτέστιν ἡ α, τῇ ὑπὸ γθζ γωνίᾳ. τὸ ἄρα ὑπὸ αεγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δεθ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αεγ, ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἀπὸ τοῦ ε ἐφαπτομένης· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δεθ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ δε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ εθ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ θ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ δοθέν· γέγονε δή μοι ἀπὸ δύο δοθέντων τῶν θ, ζ κλᾶν [τὴν θγζ]*[3]) *καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν βη τῇ θζ· τοῦτο δὲ προγέγραπται. δοθὲν ἄρα τὸ γ. ἀλλὰ καὶ τὸ ε δοθέν· θέσει ἄρα ἡ γε. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ α· ἔστι δὲ καὶ τὸ δ δοθέν, θέσει ἄρα καὶ ἡ δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ αβγ, τὰ δὲ δοθέντα ἐπ' εὐθείας τρία σημεῖα τὰ δ, ε, ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ δεθ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν θ, ζ, εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τῶν θ, ζ κεκλάσθω ἡ [θγζ]*[4])*, ὥστε παράλληλον εἶναι τὴν βη τῇ θζ, [καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α]*[5])*· λέγω ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν α, β, δ. ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ὑπὸ αεγ, δεθ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἀπὸ τοῦ ε ἐφαπτομένης, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεγ τῷ ὑπὸ δεθ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ δ, θ, γ, α σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βηγ γωνία*

---

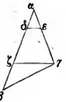
[1]) Die Hdsch. haben *ὄντος*.

[2]) So emendirt *Cammerer*; die Hdsch. haben *κᾶν δοθεῖσαν τὴν δαε*.

[3]) Einschaltung von *Commandin*.

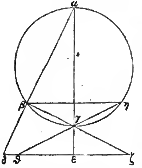
[4]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben *εὐθεῖα*

[5]) Einschaltung von *Commandin*.



Es sei $\gamma\varepsilon = \delta\zeta$, und zieht man $\gamma\zeta$, so ist $\gamma\zeta \parallel \delta\varepsilon$ und schneidet $\beta\gamma$, mithin schneidet auch $\delta\varepsilon$ die $\beta\gamma$.

Eine Aufgabe zu ebendemselben [*Command. CXVII.*] Lehrsatz. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ der Lage nach gegeben, und es liegen die drei Punkte δ, ε, ζ auf einer geraden Linie, es sollen die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$ so an den Kreis gezogen werden, dass $\beta\gamma$ mit $\gamma\zeta$ auf einer Geraden liegt.



Es sei gescheben. Durch β ziehe man $\beta\eta = \delta\zeta$ und verbinde $\eta\gamma$ und verlängere sie bis ϑ. Alsdann ist $\angle\, \beta\eta\gamma$ d. h. $\angle\, \alpha = \angle\, \gamma\vartheta\zeta$, mithin Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$. Aber Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ ist gegeben, denn es ist dem Quadrat der Tangente gleich, die von ε aus an den Kreis gelegt wird, folglich ist auch Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$ gegeben. Nun ist $\delta\varepsilon$ gegeben, folglich auch $\varepsilon\vartheta$. Aber $\varepsilon\vartheta$ ist auch der Lage nach gegeben, und da der Punkt ε gegeben ist, so ist auch ϑ gegeben. Nun ist auch der Punkt ζ gegeben; mithin entsteht die Aufgabe: von zwei gegebenen Punkten ϑ, ζ die Linien $\vartheta\gamma$, $\gamma\zeta$ so an den Kreis zu ziehen, dass $\beta\eta \parallel \vartheta\zeta$ wird. Diese Aufgabe ist bereits gelöst. Folglich ist der Punkt γ gegeben, aber auch ε ist gegeben, mithin ist $\gamma\varepsilon$ der Lage nach gegeben. Da aber der Kreis gegeben ist, so ist auch α gegeben; nun ist auch δ gegeben, mithin ist $\delta\alpha$ der Lage nach gegeben, was zu zeigen war.

Synthesis. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ und die drei Punkte δ, ε, ζ in einer geraden Linie gegeben. Ist nun Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$ dem Quadrat über der Tangente gleich, so ziehe man von den beiden Punkten ϑ, ζ an den Kreis die Linien $\vartheta\gamma$, $\gamma\zeta$, so dass $\beta\eta \parallel \vartheta\zeta$, verbinde $\varepsilon\gamma$ und verlängere sie bis α, so ist die durch α, β, δ gelegte Linie eine gerade. Da ein jedes der Rechtecke $\alpha\varepsilon.\varepsilon\gamma$, $\delta\varepsilon.\varepsilon\vartheta$ dem

τῇ ὑπὸ γθζ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ βηγ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ ἐν κύκλῳ, ἡ ὑπὸ βαγ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γθε γωνίᾳ. καὶ ἔστιν ἐν κύκλῳ τὰ α, γ, δ, θ σημεῖα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ βδ. ὅπερ μένει δι' αὐτοῦ, καὶ τὰ πτωτικὰ, ἀπάγεται γὰρ εἰς τὰ πτωτικὰ τοῦ εἰς τὸ ις.[1])

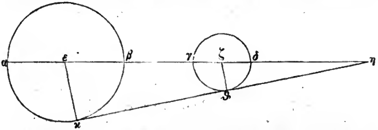
Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ αβ, γδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αδ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ εη πρὸς τὴν ηζ οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ γδ κύκλου· ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ η διαγομένη τέμνουσα τὸν γδ κύκλον ἐκβληθεῖσα καὶ τὸν αβ τέμνει. Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ η τοῦ γδ κύκλου ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζθ· παράλληλος ἤχθω ἡ εκ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εη πρὸς τὴν ηζ οὕτως ἡ εκ πρὸς τὴν ζθ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν η, θ, κ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ θ γωνία· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ κ γωνία, ὥστε εἰ τοῦ γδ ἐφάπτεται ἡ ἀπὸ τοῦ η ἐκβληθεῖσα, καὶ τοῦ αβ ἐφάψεται. ἀλλὰ καὶ τέμνουσαι τὸν γδ μεταξὺ τῶν δ, θ εἰσὶν· ἐκβαλλόμεναι ἄρα μεταξὺ τῶν κ, β ἔσονται. καὶ ἔστιν ἐφαπτομένη ἡ ηκ· τέμνει ἄρα ἡ μεταξὺ τῶν β, κ, δ, θ. ἀλλὰ ἡ αὐτὴ καὶ τὸν αβ τέμνει· ἡ ἄρα τὸν γδ τέμνουσα καὶ τὸν αβ τέμνει ἀγομένη ἀπὸ τοῦ η σημείου.

Τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ἑπτά, τὸ δεύτερον προβλήματα τέσσαρα.

[1]) Der Text der Hdsch. ist von den Worten: ὅπερ μένει an sehr verderbt. Das Obenstehende ist eine Emendation desselben.

Quadrate der von ε aus gelegten Tangente gleich ist, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$, mithin liegen die Punkte δ, ϑ, γ, α auf der Peripherie eines Kreises. Da ferner $\angle \beta\eta\gamma = \angle \gamma\vartheta\zeta$ und $\angle \beta\eta\gamma = \angle \beta\alpha\gamma$, so ist $\angle \beta\alpha\gamma = \angle \gamma\vartheta\varepsilon$. Nun liegen die Punkte α, γ, δ, ϑ auf der Peripherie eines Kreises, mithin bildet $\alpha\beta$ mit $\beta\delta$ eine gerade Linie. Das Uebrige erhellt von selbst, auch die besondern Fälle, sie lassen sich auf die besondern Fälle des Hülfssatzes zur sechszehnten Aufgabe zurückführen.

Hat man die beiden Kreise $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ [*Command. CXVIII.* und wird $\alpha\delta$ verlängert, so dass $\varepsilon\eta : \eta\zeta$ = Radius des Kreises $\alpha\beta$: Radius des Kreises $\gamma\delta$, so schneidet die von η aus gezogene Linie, die den Kreis $\gamma\delta$ schneidet, verlängert auch den Kreis $\alpha\beta$.



Es seien ε, ζ die Mittelpunkte der Kreise; man ziehe von η die Tangente $\eta\vartheta$, die den Kreis $\gamma\delta$ berührt, verbinde $\zeta\delta$ und ziehe zu ihr die Parallele $\varepsilon\varkappa$. Da nun $\varepsilon\eta : \eta\zeta = \varepsilon\varkappa : \zeta\vartheta$, so ist die Linie, die durch die Punkte η, ϑ, $\varkappa$ geht, eine gerade. Aber $\angle \vartheta$ = R, mithin auch $\angle \varkappa$ = R, folglich wird die von η aus gezogene Tangente des Kreises $\gamma\delta$ verlängert auch den Kreis $\alpha\beta$ berühren. Nun liegen die Linien, welche den Kreis $\gamma\delta$ schneiden, zwischen δ, ϑ, mithin werden sie verlängert zwischen $\varkappa$, β treffen. Aber die $\eta\varkappa$ ist eine Tangente, mithin ist die zwischen β, $\varkappa$, δ, ϑ liegende Linie eine Sekante; sie schneidet den Kreis $\alpha\beta$, folglich wird die vom Punkt η aus gezogene Linie, die den Kreis $\gamma\delta$ schneidet, auch den Kreis $\alpha\beta$ schneiden.

Das erste Buch über die Berührungen enthält sieben Aufgaben, das zweite deren vier.

Ἐπιπέδων τόπων β̅.

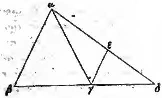
Εἰς τὸν τοῦ δευτέρου πρῶτον τόπον. Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ αδ, καὶ ἔστω ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτω τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βδγ τῷ ἀπὸ αδ. Ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γε, καὶ τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ αβ, γε. ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, γε τῷ ἀπὸ γα. ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ἐναλλάξ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ τῇ β, ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδγ τῷ ἀπὸ δα. τὸ δὲ ἀναστρεφόμενον φανερόν.

Εἰς τὸν δεύτερον τόπον. Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ κάθετος ἡ δα· ὅτι μὲν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχῇ· ἐὰν δὲ ἡ βγ δίχα τμηθῇ [κατὰ] τὸ ε, ἡ τῶν ἀπὸ βδ, [δγ] ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. Ὅτι μὲν οὖν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ δβ, δγ ὑπεροχῇ, φανερόν· ἔστι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ αβ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, αδ, τὸ δὲ ἀπὸ αγ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ· ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ αγ, τούτῳ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ αδ, δβ τῶν ἀπὸ αδ, δγ· καὶ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ αδ, λοιπὸν ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ βδ τοῦ ἀπὸ δγ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ αγ. τῶν δὲ ἀπὸ βδ, δγ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ· ὥστε καὶ τῶν ἀπὸ αβ, αγ. ὅτι καὶ ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε, οὕτως. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εγ, ἡ βδ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ γεδ, καὶ τὸ ἀπὸ βδ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς γεδ, ἀλλὰ το ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς γεδ τοῦ ἀπὸ γδ ὑπερέχει τῷ τετράκις ὑπὸ γεδ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε· ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε.

Ebene Oerter.

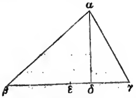
Zwei Bücher.

Zu dem ersten Ort des zweiten Buches. [*Command. CXIX.*] Hat man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und zieht die Linie $\alpha\delta$ so, dass $\beta\delta : \delta\gamma$ = Quadrat über $\beta\alpha$: Quadrat über $\alpha\gamma$, so ist Rechteck $\beta\delta . \delta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$.



Zieht man durch γ die Linie $\gamma\varepsilon \parallel \alpha\beta$, so ist $\beta\delta : \delta\gamma = \alpha\beta : \gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\beta$: Rechteck $\alpha\beta . \beta\varepsilon$. Aber es war $\beta\delta : \delta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\beta$: Quadrat über $\alpha\gamma$, mithin Rechteck $\alpha\beta . \gamma\varepsilon$ = Quadrat über $\alpha\gamma$. Daher stehen die gleiche Wechselwinkel einschliessenden Seiten in Proportion, folglich $\angle \gamma\alpha\delta = \angle \beta$, daher Rechteck $\beta\delta . \delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\alpha$. Der umgekehrte Satz erhellt ohne Schwierigkeit.

Zum zweiten Ort Hat man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und fällt die Senkrechte $\delta\alpha$, so ist Quadrat über $\beta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$; ist aber $\beta\gamma$ im Punkte ε halbirt, so ist Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$ = 2 Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\delta$. [*Command. CXX.*]



Dass Quadrat über $\beta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$, ist leicht zu beweisen; es ist nämlich Quadrat über $\beta\alpha$ = Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\alpha\delta$ und Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$ + Quadrat über $\delta\gamma$, folglich

Quadrat über $\beta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\alpha\delta$ — (Quadrat über $\alpha\delta$ + Quadrat über $\delta\gamma$),
daher Quadrat über $\beta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$.

Es ist aber Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$ = 2 Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\delta$, folglich Quadrat über $\beta\alpha$ — Quadrat über $\alpha\gamma$ = 2 Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\delta$. Dass nun Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\delta\gamma$ = 2 Rechteck $\beta\gamma . \varepsilon\delta$, wird so bewiesen. Da $\beta\varepsilon = \varepsilon\gamma$, so ist $\beta\delta = \gamma\varepsilon + \varepsilon\delta$, und Quadrat über $\beta\delta$ = Quadrat über $(\gamma\varepsilon + \varepsilon\delta)$; aber

Εἰς τὸν αὐτὸν, ἐὰν μὴ ὁ λόγος ἴσου πρὸς ἴσον. Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τὸ ἀπὸ βα τοῦ ἀπὸ αγ δοθέντι [1]) μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· δοθέντι μὲν τῷ ε, λόγῳ δὲ τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ· ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ δβγ τοῦ ε χωρίου. Ἀφῃρήσθω γὰρ τὸ δοθὲν χωρίον τὸ ὑπὸ αβη· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ἀπὸ αγ λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. κείσθω τῷ ὑπὸ βαη ἴσον τὸ ὑπὸ ζαγ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ ζαγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τουτέστι τῆς ζα πρὸς τὴν αγ, ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῇ ζβ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ζ γωνία τῇ ὑπὸ γαδ γωνίᾳ· ἀλλὰ ἡ ζ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αηγ γωνίᾳ, καὶ ἡ ὑπὸ αηγ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ γωνίᾳ. μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αδθ τῆς ὑπὸ γαδ, καὶ τῆς ὑπὸ γηα ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αδθ γωνία· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ δβγ τοῦ ὑπὸ αβη, τουτέστι τοῦ ε τοῦ δοθέντος χωρίου.

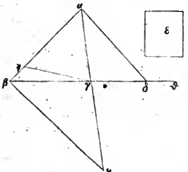
Εἰς τὸν τρίτον τόπον. Ἐὰν ᾖ τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διαχθῇ τις ἡ αδ δίχα τέμνουσα τὴν βγ· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν βα, αγ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δγ τετραγώνων. Ἤχθω κάθετος ἡ αε. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε, εγ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν βδ, εδ τετραγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ δὶς ἀπὸ αε μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ δε διπλάσιον τοῦ ἀπὸ αδ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε, εγ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ αε ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ βα, αγ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ βδ, αδ τετραγώνων, τουτέστι τῶν ἀπὸ γδ, αδ τετραγώνων.

---

[1]) Die Hdsch. haben δοθέντος.

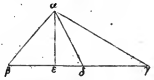
Quadrat über $(\gamma\varepsilon + \varepsilon\delta)$ — Quadrat über $\gamma\delta$ = 4 Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$
= 2 Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\delta$,
mithin Quadrat über $\beta\delta$ — Quadrat über $\gamma\delta$ = 2 Rechteck $\beta\gamma \,.\, \varepsilon\delta$.

Zu demselben Ort, wenn das Verhältniss der Gleichheit nicht stattfindet. [*Command. CXXI.*] Hat man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und ist der Unterschied zwischen dem Quadrat über $\beta\alpha$ und einem gegebenen Raum zu dem Quadrat über $\alpha\gamma$ in einem Verhältniss (der gegebene Raum sei ε, das Verhältniss $\beta\delta : \delta\gamma$), so ist das Rechteck $\delta\beta \,.\, \beta\gamma$ grösser als der Raum ε.



Nimmt man den gegebenen Raum = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$ hinweg, so steht der Rest, nämlich Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\eta$, zu dem Quadrat über $\alpha\gamma$ in dem gegebenen Verhaltniss $\beta\delta : \delta\gamma$. Ist nun Rechteck $\zeta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\eta$, so ist Rechtek $\zeta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ zu dem Quadrat über $\alpha\gamma$, d. h. $\zeta\alpha : \alpha\gamma = \beta\delta : \delta\gamma$. Daher ist $\alpha\delta \parallel \zeta\beta$, mithin $\angle\zeta = \angle\gamma\alpha\delta$; aber $\angle\zeta = \angle\alpha\eta\gamma$, mithin $\angle\alpha\eta\gamma = \angle\gamma\alpha\delta$. Nun ist $\angle\alpha\delta\vartheta > \angle\gamma\alpha\delta$, mithin auch $\angle\alpha\delta\vartheta > \angle\alpha\eta\gamma$, folglich Rechteck $\delta\beta \,.\, \beta\gamma >$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$, d. h. grösser als der gegebene Raum ε.

Zum dritten Ort. Zieht man in dem [*Command. CXXII.*] Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Linie $\alpha\delta$, welche $\beta\gamma$ halbirt, so ist Quadrat über $\beta\alpha$ + Quadrat über $\alpha\gamma$ = 2 (Quadrat über $\alpha\delta$ + Quadrat über $\delta\gamma$).



Man fälle die Senkrechte $\alpha\varepsilon$. Nun ist Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$ = 2 (Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\delta$). Ferner ist auch 2 Quadrat über $\alpha\varepsilon$ + 2 Quadrat über $\delta\varepsilon$ = 2 Quadrat über $\alpha\delta$ und

Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + 2 Quadrat über $\alpha\varepsilon$ =
Quadrat über $\beta\alpha$ + Quadrat über $\alpha\gamma$,

mithin Quadrat über $\beta\alpha$ + Quadrat über $\alpha\gamma$ = 2 (Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\alpha\delta$) = 2 (Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\alpha\delta$).

Λόγου ὄντος τοῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ, καὶ χωρίου τοῦ ὑπὸ τῶν γα, αδ, ἐὰν τῶν δβ, βγ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ βε, δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ αε τοῦ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ γα, αδ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἄλλη τις ἡ ζε πρὸς τὴν εγ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶ κατὰ διαίρεσιν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ οὕτως ἡ ζγ πρὸς τὴν γε, καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ πρὸς ὅλην τὴν βε ἐστὶν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν βγ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἐστὶν ἡ δε πρὸς τὴν εγ, ἐκ τοῦ εἶναι μέσην ἀνάλογον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν γε· χωρίον χωρίῳ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αζ, εγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ, δε. τὸ δὲ ὑπὸ αζ, γε τοῦ ὑπὸ αεγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ζεγ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αζ, εγ τοῦ ὑπὸ αεγ, [τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ αγ, δε τοῦ ὑπὸ αεγ· τὸ ἄρα ὑπὸ αγ, δε τοῦ ὑπὸ αεγ] [1]) μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ ζεγ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αγ, δε τοῦ ὑπὸ αεγ, τούτῳ, ὑπερέχει καὶ τὸ ἀπὸ αε τοῦ ὑπὸ γαδ· τὸ ἄρα ἀπὸ αε τετράγωνον τοῦ ὑπὸ γαδ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ ζεγ. [τὸ δὲ ὑπὸ ζεγ] [2]) λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ, ὥστε τὸ ἀπὸ αε τοῦ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ γαδ, ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ.

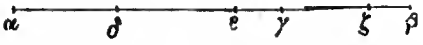
Λόγος τῆς αβ πρὸς τὴν βγ, χωρίον τὸ ὑπὸ γαδ, ἐὰν τῶν δβ, βγ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ βε· δει τὸ ἀπὸ τῆς αε τοῦ ἀπὸ τῆς εγ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ γαδ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἄλλη τις ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. διελόντι ἄρα καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπήν ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν βε οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν βγ· ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν εγ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν γε· χωρίον χωρίῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζα, γε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ, δε. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ αεγ μετὰ τοῦ ὑπὸ γαδ, ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ αε

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) Einschaltung von *Commandin.*

Hat man das Verhältniss $\alpha\beta : \beta\gamma$ [*Command. CXXIII.*] und das Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$, und ist $\beta\varepsilon$ die mittlere Proportionale zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$, so steht der Unterschied zwischen dem Quadrat über $\alpha\varepsilon$ und dem Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$ zu dem Quadrat über $\varepsilon\gamma$ in dem Verhältniss von $\alpha\beta : \beta\gamma$.



Verhält sich $\zeta\varepsilon : \varepsilon\gamma$ wie $\alpha\beta : \beta\gamma$, so ist durch Differenz $\alpha\gamma : \gamma\beta = \zeta\gamma : \gamma\varepsilon$

und durch Summe $\alpha\zeta : \beta\varepsilon = \alpha\gamma : \gamma\beta$,

daher $\alpha\zeta : \alpha\gamma = \beta\varepsilon : \beta\gamma$;

aber $\varepsilon\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\gamma$,

weil $\beta\varepsilon$ die mittlere Proportionale zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$ ist,

mithin $\alpha\zeta : \alpha\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\gamma$,

folglich Rechteck $\alpha\zeta . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \delta\varepsilon$.

Es ist aber Rechteck $\alpha\zeta . \varepsilon\gamma$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\gamma$

und Rechteck $\alpha\zeta . \varepsilon\gamma$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \delta\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$,

daher Rechteck $\alpha\gamma . \delta\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\gamma$.

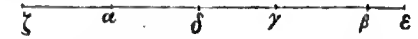
Aber Rechteck $\alpha\gamma . \delta\varepsilon$ — Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\varepsilon$ — Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$,

mithin Quadrat über $\alpha\varepsilon$ — Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$ = Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\gamma$.

Nun ist Rechteck $\zeta\varepsilon . \varepsilon\gamma$: Quadrat über $\varepsilon\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma$,

folglich Quadrat über $\alpha\varepsilon$ — Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$: Quadrat über $\varepsilon\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma$.

Hat man das Verhältniss $\alpha\beta : \beta\gamma$ [*Command. CXXIV.*] und das Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$, und ist $\beta\varepsilon$ die mittlere Proportionale zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$, so steht der Unterschied zwischen dem Quadrat über $\alpha\varepsilon$ und dem Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$ zu dem Quadrat über $\varepsilon\gamma$ in dem Verhältniss von $\alpha\beta : \beta\gamma$.



Verhält sich $\zeta\varepsilon : \varepsilon\gamma$ wie $\alpha\beta : \beta\gamma$, so ist $\zeta\alpha : \beta\varepsilon = \alpha\gamma : \beta\gamma$,

mithin $\zeta\alpha : \alpha\gamma = \beta\varepsilon : \beta\gamma$.

Aber $\beta\varepsilon : \beta\gamma = \varepsilon\delta : \varepsilon\gamma$,

daher $\zeta\alpha : \alpha\gamma = \varepsilon\delta : \varepsilon\gamma$,

folglich Rechteck $\zeta\alpha . \varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma . \varepsilon\delta$.

Addirt man Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\gamma$ + Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$ auf beiden Seiten

ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ τε ὑπὸ ζεγ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ γαδ· ὥστε τὸ ἀπὸ αε τοῦ ἀπὸ εγ μεῖζον τῷ ὑπὸ γαδ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ· τὸ γὰρ ὑπὸ ζεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον.

Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ γ, δ· ὅτι [ἐὰν][1]) τὸ ἀπὸ αδ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν βγ συντεθήσεται, γίνεται τό τε ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ. πρὸς τὴν γβ, καὶ ἔτι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Τῷ γὰρ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ λόγον ἔχοντι ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ζδ πρὸς τὴν δβ· καὶ συνθέντι[2]) ἄρα καὶ τὰ λοιπά, ἡ αζ πρὸς λοιπὴν τὴν γδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ αζ, γδ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ· ὥστε τὸ μὲν λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ζδβ, τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ [τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ][3]) ἐστὶ τὸ ὑπὸ αγβ, τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αὐτῆς αβ πρὸς τὴν βγ ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζ, δγ. ὅτι οὖν τὸ ἀπὸ αδ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βαγ καὶ τῷ ὑπὸ αζ, γδ. καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ δαγ· ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ αδγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αγ, δβ καὶ τῷ ὑπὸ αζ, γδ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ αζ, γδ· ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ζδγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ζδβ, γίνεται ὅλον τὸ ὑπὸ ζδ, γβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγ, δβ. ἔστι δέ, ἀνάλογον γὰρ αἱ αγ, γβ, ζδ, δβ εἰσὶν εὐθεῖαι.

Θέσει [καὶ μεγέθει][4]) εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τυχὸν τὸ γ· ὅτι ἐστὶ δοθὲν ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον

---

[1]) Einschaltung von *Commandin*

[2]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben *συντεθήσεται.*

[3]) Einschaltung von *Commandin.*

[4]) Einschaltung von *Cammerer.*

hinzu, so ist Quadrat über $\alpha\varepsilon$ = Rechteck $\zeta\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ + Rechteck $\gamma\alpha . \alpha\delta$, mithin Quadrat über $\alpha\varepsilon$ — Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\delta$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$
$= \alpha\beta : \beta\gamma$,
denn in diesem Verhältniss steht Rechteck $\zeta\varepsilon : \varepsilon\gamma$ zu dem Quadrat über $\varepsilon\gamma$.

Hat man die Linie $\alpha\beta$ und in ihr [*Command. CXXV.*] zwei Punkte γ, δ; setzt man nun das Quadrat über $\alpha\delta$ und den Raum, welcher zu dem Quadrat über $\delta\beta$ in dem Verhältniss $\alpha\gamma : \beta\gamma$ steht, zusammen, so erhält man das Quadrat über $\alpha\gamma$, ferner einen Raum, der sich zu dem Quadrat über $\gamma\beta$ wie $\alpha\gamma : \gamma\beta$ verhält, und noch einen Raum, der zu dem Quadrat über $\gamma\delta$ in dem Verhältniss $\alpha\beta : \beta\gamma$ steht.



Es sei $\zeta\delta : \delta\beta = \alpha\gamma : \gamma\beta$, so ist durch Zusammenfassen und Differenz $\alpha\zeta : \gamma\delta$ d. h. Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \gamma\delta$: Quadrat über $\gamma\delta$ = $\alpha\beta : \beta\gamma$. Mithin ist Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\beta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat über $\delta\beta$ wie $\alpha\gamma : \gamma\beta$ verhält; ferner ist Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat über $\gamma\beta$ wie $\alpha\gamma : \gamma\beta$ verhält, und endlich Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \gamma\delta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat über $\gamma\delta$ wie $\alpha\beta : \beta\gamma$ verhält. Es ist nun zu zeigen, dass

Quadrat über $\alpha\delta$ + Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\beta$ = Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ + Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \gamma\delta$.

Subtrahirt man nämlich auf beiden Seiten das Rechteck $\delta\alpha . \alpha\gamma$, so ist

Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ + Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\beta$ = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\beta$ + Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \gamma\delta$.

Subtrahirt man weiter auf beiden Seiten das Rechteck $\alpha\zeta . \gamma\delta$, so ist Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\gamma$ + Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\beta$ (d. h. Rechteck $\zeta\delta \,.\, \gamma\beta$) = Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\beta$.

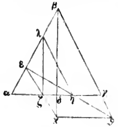
Dies stimmt mit der Annahme, denn die Linien $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\zeta\delta$, $\delta\beta$ stehen in Proportion.

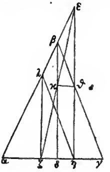
Ist die Linie $\alpha\beta$ der Lage und Grösse [*Command. CXXVI.*] nach und in ihr der Punkt γ gegeben, so ist zu zeigen, dass in $\alpha\beta$ (ein Punkt δ) gegeben ist, so dass das Quadrat über $\alpha\gamma$ und ein Raum, der zu dem Quadrat über $\gamma\beta$ ein gegebenes Verhältniss hat, zusammen gleich ist einem gegebenen Raum und dem Raum, der zu dem Quadrat über der Linie zwischen dem gegebenen Punkt (δ) und dem gegebenen Punkt γ ein gegebenes Verhältniss hat.

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ δοθέντα ἴσον ἐστὶ δοθέντι καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ γ δοθέντος. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ δοθεὶς λόγος οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ· λόγος ἄρα καὶ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ δοθείς· ὥστε δοθέν ἐστι τὸ δ σημεῖον. ἐπεὶ δὲ εὐθεῖά ἐστιν ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ δ, γ, τὸ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ αδ καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, καὶ ἔτι τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ. καὶ τὸ λόγον ἔχον[1] *πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν βδ τὸ ὑπὸ αδβ· τὸ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, τουτέστι δοθέντι,*[2] *ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βαδ, τουτέστι δοθέντι, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, τουτέστι δοθέντι. ὁμοίως καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν τὸ γ ἐκτὸς ᾖ τῆς αβ εὐθείας, τῇ αὐτῇ ἀκολουθίᾳ δείξομεν.*

Πορισμάτων $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$.

Τοῦ πρώτου εἰς τὸ πρῶτον πόρισμα. *Ἔστω καταγραφὴ ἡ αβγδεζη, καὶ ἔστω ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θκ· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ θκ τῇ αγ.*





[1] Die Hdsch. haben *καὶ τῷ λόγον ἔχοντι.*

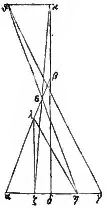
[2] Die Hdsch. haben *τουτέστι τῷ τε ὑπὸ βαδ.*

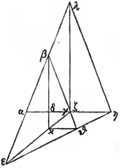


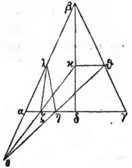
Steht $\alpha\delta : \delta\beta$ in dem gegebenen Verhältniss, so ist das Verhältniss $\alpha\delta : \delta\beta$ gegeben, mithin ist der Punkt δ gegeben. Da nun $\alpha\beta$ eine gerade Linie und δ, γ zwei Punkte derselben sind, so ist das Quadrat über $\alpha\gamma$ und der Raum, der zu dem Quadrat über $\gamma\beta$ in dem Verhältniss von $\alpha\delta : \delta\beta$ steht, zusammen gleich dem Quadrat über $\alpha\delta$ und dem Raum, der zu dem Quadrat über $\delta\beta$ das Verhältniss $\alpha\delta : \delta\beta$ hat und dem Raum, der zu dem Quadrat über $\gamma\delta$ in dem Verhältniss von $\alpha\beta : \beta\delta$ steht. Nun ist Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$ der Raum, der zu dem Quadrat über $\delta\beta$ das Verhältniss von $\alpha\delta : \beta\delta$ hat. Daher ist das Quadrat über $\alpha\gamma$ und der Raum, der zu dem Quadrat über $\gamma\beta$ das Verhältniss $\alpha\delta : \delta\beta$ d. h. das gegebene Verhältniss hat, zusammen gleich dem Rechteck $\beta\alpha . \alpha\delta$ d. h. einem gegebenen Raum, und dem Raum, der zu dem Quadrat über $\delta\gamma$ in dem Verhältniss $\alpha\beta : \beta\delta$ d. h. in einem gegebenen Verhältniss steht. Auf ähnliche Weise lässt sich der Beweis führen, wenn der gegebene Punkt γ ausserhalb der Linie $\alpha\beta$ liegt.

Drei Bücher Porismen.

Zum ersten Porisma des ersten Buchs. [*Command. CXXVII.*] Liegen die Punkte α, β, γ, δ, ε, ζ, η auf sich schneidenden Linien, ist $\alpha\zeta : \zeta\eta = \alpha\delta : \delta\gamma$, und zieht man $\vartheta\varkappa$, so ist $\vartheta\varkappa \parallel \alpha\gamma$.







Ἤχθω διὰ τοῦ ζ τῇ βδ παράλληλος ἡ ζλ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ δα πρὸς τὴν αζ, τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ γα πρὸς τὴν αη· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ λη τῇ βγ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν βλ οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ εκ πρὸς τὴν κζ, [καὶ ἡ εθ πρὸς τὴν θη] [1], καὶ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν κζ οὕτως ἐστὶν ἡ εθ πρὸς τὴν θη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ θκ τῇ αγ.

Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως. Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ, ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ηζ πρὸς τὴν ζα οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δα· συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δζ οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν γη. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς αδ πρὸς τὴν δζ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βε καὶ τοῦ τῆς εθ πρὸς τὴν θη· ὁ ἄρα συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν βε καὶ ἡ εκ πρὸς τὴν κζ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν βε καὶ ἡ εθ πρὸς τὴν θη. καὶ κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς αβ πρὸς τὴν βε λόγος, λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς εκ πρὸς τὴν κζ λόγος [ὁ αὐτὸς] [2] ἐστι τῷ τῆς εθ πρὸς τὴν θη· παράλληλος [3] ἄρα ἐστὶν ἡ θκ τῇ αγ.

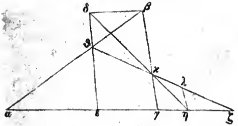
Εἰς τὸ δεύτερον πόρισμα. Καταγραφὴ ἡ αβγδεζηθ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ αζ τῇ δβ, ὡς δὲ ἡ αε πρὸς τὴν εζ οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν ηζ· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν θ, κ, ζ. Ἤχθω διὰ τοῦ η παρὰ τὴν δε ἡ ηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θκ, [καὶ] ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εζ οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν ηζ, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν γη οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ζη· ὡς δὲ ἡ αε πρὸς τὴν γη οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν ηλ, καὶ ἐναλλὰξ διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο· καὶ ὡς ἄρα ἡ εζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν ηλ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ εθ τῇ ηλ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν θ, κ, λ, ζ. ὅπερ: —

[1] Einschaltung von *Commandin*.
[2] Einschaltung von *Commandin*.
[3] So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben λόγος.

Man ziehe durch ζ zu $\beta\delta$ die Parallele $\zeta\lambda$. Da nun $\alpha\zeta : \zeta\eta = \alpha\delta : \delta\gamma$, so ist durch Umkehr, Zusammenfassen und Umstellung $\delta\alpha : \alpha\zeta$ d. h. $\beta\alpha : \alpha\lambda = \gamma\alpha : \alpha\eta$, mithin $\lambda\eta \parallel \beta\gamma$. Demnach ist $\varepsilon\beta : \beta\lambda = \varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$, und $\varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$, daher $\vartheta\varkappa \parallel \alpha\gamma$.

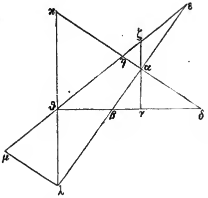
Mit Hülfe der zusammengesetzten Proportion wird der Beweis auf folgende Weise geführt. Da $\delta\zeta : \zeta\eta = \alpha\delta : \delta\beta$, so ist
$$\eta\zeta : \zeta\alpha = \gamma\delta : \delta\alpha,$$
mithin durch Zusammenfassen, Umstellung und Umkehr
$$\alpha\delta : \delta\zeta = \alpha\gamma : \gamma\eta.$$
Aber $\alpha\delta : \delta\zeta$ ist zusammengesetzt aus $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ und $\varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$, mithin ist das aus $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ und $\varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta$ zusammengesetzte Verhältniss gleich dem, welches aus $\alpha\beta : \beta\varepsilon$ und $\varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$ zusammengesetzt ist, folglich durch Aufhebung des gemeinschaftlichen Verhältnisses $\alpha\beta : \beta\varepsilon$, $\varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$.
Daher $\vartheta\varkappa \parallel \alpha\gamma$.

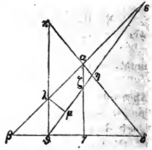
Zum zweiten Porisma. Liegen [*Command.* CXXVIII] die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$ auf geraden Linien, die sich durchschneiden, ist $\alpha\zeta \parallel \delta\beta$, und $\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta = \gamma\eta : \eta\zeta$, so liegen die Punkte ϑ, $\varkappa$, ζ in einer geraden Linie.

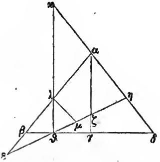


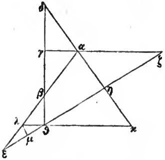
Man ziehe zu $\delta\varepsilon$ durch η die Parallele $\eta\lambda$, verbinde $\vartheta\varkappa$ und verlängere sie bis λ. Da nun $\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta = \gamma\eta : \eta\zeta$, so ist $\alpha\varepsilon : \gamma\eta = \varepsilon\zeta : \eta\zeta$. Aber $\alpha\varepsilon : \gamma\eta = \varepsilon\vartheta : \eta\lambda$, und umgekehrt indem zwei Linien zweien parallel sind, mithin $\varepsilon\zeta : \zeta\eta = \varepsilon\vartheta : \eta\lambda$, und da $\varepsilon\vartheta \parallel \eta\lambda$, so ist die durch die Punkte ϑ, $\varkappa$, λ, ζ gehende Linie eine gerade.

Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς αβ, γα, δα διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ϑε, ϑδ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ϑε, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ ϑη, ζε οὕτω τὸ ὑπὸ ϑβ, δγ πρὸς τὸ ὑπὸ ϑδ, βγ. Ἤχθω διὰ μὲν τοῦ ϑ τῇ ζγα παράλληλος ἡ κλ, καὶ αἱ δα, αβ συμπιπτέτωσαν αὐτῇ κατὰ τὰ κ, λ σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ λ τῇ δα παράλληλος ἡ λμ καὶ συμπιπτέτω τῇ εϑ ἐπὶ τὸ μ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ εζ πρὸς τὴν ζα οὕτως ἡ εϑ πρὸς τὴν ϑλ, ὡς δὲ ἡ







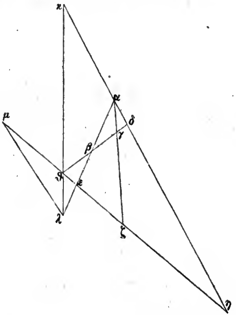


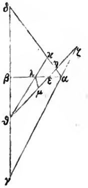
αζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ ϑλ πρὸς τὴν ϑμ· καὶ γὰρ ἡ ϑκ πρὸς τὴν ϑη ἐν παραλλήλῳ·[1]) δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ εϑ πρὸς τὴν ϑμ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ϑε, ηζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εζ, ϑμ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ τῶν εζ, ϑη· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν εϑ, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ

[1]) Diese Stelle ist offenbar verderbt.

Werden durch die drei geraden [*Command. CXXIX.*] Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ die zwei Geraden $\vartheta\varepsilon$, $\vartheta\delta$ gezogen, so ist Rechteck $\vartheta\varepsilon \,.\, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \,.\, \zeta\varepsilon$ = Rechteck $\vartheta\beta \,.\, \delta\gamma$: Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \beta\gamma$.

Man ziehe durch ϑ zu $\zeta\gamma\alpha$ die Parallele $\varkappa\lambda$, welche $\delta\alpha$, $\alpha\beta$ in den Punkten $\varkappa$, λ schneidet, und durch λ zu $\delta\alpha$ die Parallele $\lambda\mu$, welche die $\varepsilon\vartheta$ im Punkte μ trifft.





Da nun $\varepsilon\zeta : \zeta\alpha = \varepsilon\vartheta : \vartheta\lambda$
und $\alpha\zeta : \zeta\eta = \vartheta\lambda : \vartheta\mu$,
mithin $\varepsilon\zeta : \zeta\eta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\mu$,
so ist Rechteck $\vartheta\varepsilon \,.\, \eta\zeta = \varepsilon\zeta \,.\, \vartheta\mu$.

Bildet man ein anderes Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \vartheta\eta$, so ist Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \eta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \vartheta\eta$ = Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \vartheta\mu$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \vartheta\eta$

$= \vartheta\mu : \vartheta\eta$

$= \lambda\vartheta : \vartheta\varkappa$.

Aus demselben Grunde ist

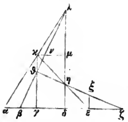
$\varkappa\vartheta : \vartheta\lambda$ = Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\vartheta\beta \,.\, \gamma\delta$,

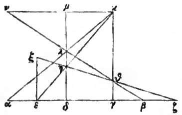
mithin $\lambda\vartheta : \varkappa\vartheta$ = Rechteck $\vartheta\beta \,.\, \gamma\delta$: Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \beta\gamma$;

τῶν εζ, ηθ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν εζ, θμ πρὸς τὸ ὑπὸ εζ, ηθ, τουτέστιν ἡ θμ πρὸς θη, τουτέστιν ἡ λθ πρὸς τὴν θκ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θλ οὕτω τὸ ὑπὸ θδ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ θβ, γδ· ἀνάπαλιν[1]) ἄρα γίνεται ὡς ἡ λθ πρὸς τὴν θκ οὕτω τὸ ὑπὸ θβ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, βγ· ὡς δὲ ἡ λθ πρὸς τὴν θκ οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ εθ, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ εζ, ηθ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ εθ, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ εζ, ηθ οὕτω τὸ ὑπὸ θβ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, βγ.

Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως. Ἐπεὶ τοῦ ὑπὸ θε, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ θη, ζε συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ θε πρὸς τὴν εζ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ζη πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ θε πρὸς τὴν εζ οὕτως ἡ θλ πρὸς τὴν ζα, ὡς δὲ ἡ ζη πρὸς τὴν ηθ οὕτως ἡ ζα πρὸς τὴν θκ, τὸ ἄρα ὑπὸ θε, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ θη, εζ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ θλ πρὸς τὴν ζα καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ζα πρὸς τὴν θκ. ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς θλ πρὸς τὴν ζα καὶ τοῦ τῆς ζα πρὸς τὴν θκ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θλ πρὸς τὴν θκ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ θε, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ θη, ζε οὕτως ἡ θλ πρὸς τὴν θκ. διὰ ταῦτα καὶ ὡς τὸ ὑπὸ θδ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ θβ, γδ οὕτως ἐστὶν ἡ θκ πρὸς τὴν θλ· καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ θβ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, βγ οὕτως ἡ θλ πρὸς τὴν θκ. ἦν δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν θε, ζη πρὸς τὸ ὑπὸ θη, ζε [οὕτως ἡ θλ πρὸς τὴν θκ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θε, ζη πρὸς τὸ ὑπὸ θη, ζε] οὕτω τὸ ὑπὸ θβ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ θδ, βγ.

Καταγραφὴ ἡ αβγδεζηθκλ[2]), ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ αζ, βγ πρὸς το ὑπὸ αβ, ζγ οὕτω τὸ ὑπὸ αζ, δε πρὸς τὸ ὑπὸ αδ, εζ· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν θ, η, ζ σημείων.





---

[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἀνάλογον.

[2]) Die Hdsch. haben αβγδεζηθικλ

es war aber $\lambda\vartheta : \varkappa\vartheta =$ Rechteck $\varepsilon\vartheta \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \vartheta\eta$,
daher Rechteck $\varepsilon\vartheta \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \vartheta\eta =$ Rechteck $\vartheta\beta \, . \, \gamma\delta$: Rechteck $\vartheta\delta \, . \, \beta\gamma$.

Durch Zusammensetzung der Verhältnisse wird der Beweis so geführt: Da das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\varepsilon \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \, . \, \zeta\varepsilon$ zusammengesetzt ist aus $\vartheta\varepsilon : \varepsilon\zeta$ und $\zeta\eta : \eta\vartheta$, und

$$\vartheta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \vartheta\lambda : \zeta\alpha,$$
$$\zeta\eta : \eta\vartheta = \zeta\alpha : \vartheta\varkappa,$$

so ist Rechteck $\vartheta\varepsilon \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \, . \, \zeta\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\vartheta\lambda : \zeta\alpha$ und aus $\zeta\alpha : \vartheta\varkappa$. Aber das aus $\vartheta\lambda : \zeta\alpha$ und $\zeta\alpha : \vartheta\varkappa$ zusammengesetzte Verhältniss ist $= \vartheta\lambda : \vartheta\varkappa$, mithin

Rechteck $\vartheta\varepsilon \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \, . \, \zeta\varepsilon = \vartheta\lambda : \vartheta\varkappa$.

Aus demselben Grunde ist

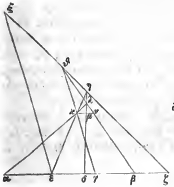
Rechteck $\vartheta\delta \, . \, \beta\gamma$: Rechteck $\vartheta\beta \, . \, \gamma\delta = \vartheta\varkappa : \vartheta\lambda$

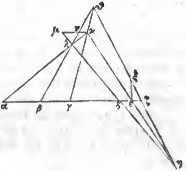
und Rechteck $\vartheta\beta \, . \, \gamma\delta$: Rechteck $\vartheta\delta \, . \, \beta\gamma = \vartheta\lambda : \vartheta\varkappa$;

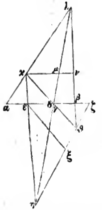
es war aber auch Rechteck $\vartheta\varepsilon \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \, . \, \zeta\varepsilon = \vartheta\lambda : \vartheta\varkappa$,

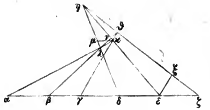
mithin Rechteck $\vartheta\varepsilon \, . \, \eta\zeta$: Rechteck $\vartheta\eta \, . \, \zeta\varepsilon =$ Rechteck $\vartheta\beta \, . \, \gamma\delta$: Rechteck $\vartheta\delta \, . \, \beta\gamma$.

Liegen die Punkte α, β, γ, δ, ε, ζ, [*Command.* CXXX.] η, ϑ, $\varkappa$, λ auf geraden Linien, die sich durchschneiden, und ist Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\beta \, . \, \zeta\gamma =$ Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \delta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta \, . \, \varepsilon\zeta$, so ist die durch die Punkte ϑ, η, ζ gehende Linie eine gerade.



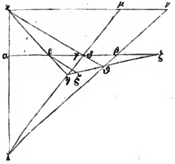


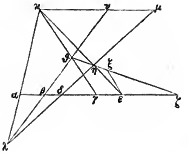




Ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ αζ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ αβ, γζ οὕτω τὸ ὑπὸ αζ, δε πρὸς τὸ ὑπὸ αδ, εζ, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ αζ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ αζ, δε, τουτέστιν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν δε οὕτω τὸ ὑπὸ αβ, γζ πρὸς τὸ ὑπὸ αδ, εζ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς βγ πρὸς τὴν δε συνῆπται λόγος, ἐὰν διὰ τοῦ κ τῇ αζ παράλληλος ἀχθῇ ἡ κμ, ἔκ τε τοῦ τῆς βγ πρὸς κν καὶ τῆς κν πρὸς κμ καὶ ἔτι τοῦ τῆς κμ πρὸς δε· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ αβ, γζ πρὸς τὸ ὑπὸ αδ, εζ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς βα πρὸς αδ καὶ τοῦ τῆς γζ πρὸς τὴν ζε· κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς βα πρὸς αδ ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τῆς νκ πρὸς κμ, λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς γζ πρὸς τὴν ζε συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς βγ πρὸς τὴν κν, τουτέστι τοῦ τῆς ϑγ πρὸς τὴν κϑ, καὶ τοῦ τῆς κμ πρὸς τὴν δε, τουτέστι τῆς κη πρὸς τὴν ηε. εὐθεῖα ἄρα ἡ διὰ τῶν ϑ, η, ζ. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ ϑγ παράλληλον ἀγάγω τὴν εξ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ϑη ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ ξ, ὁ μὲν τῆς κη πρὸς τὴν ηε λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κϑ πρὸς τὴν εξ, ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς γϑ πρὸς τὴν ϑκ καὶ τοῦ τῆς ϑκ πρὸς τὴν εξ μεταβαλλόμενος εἰς τὸν τῆς ϑγ πρὸς εξ λόγον, καὶ ὁ τῆς γζ πρὸς ζε λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς γϑ πρὸς τὴν εξ· παραλλήλου οὔσης τῆς γϑ τῇ εξ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ϑ, ξ, ζ, τοῦτο γὰρ φανερόν· ὥστε καὶ ἡ διὰ τῶν ϑ, η, ζ εὐθεῖά ἐστιν.

Ἐὰν ᾖ καταγραφὴ ἡ αβγδεζηϑ, γίνεται ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βγ· ἔστω οὖν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βγ· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν α, η, ϑ.





Da Rechteck $\alpha\zeta \cdot \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\beta \cdot \gamma\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta \cdot \delta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\delta \cdot \varepsilon\zeta$, so ist Rechteck $\alpha\zeta \cdot \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\zeta \cdot \delta\varepsilon$ (d. h. $\beta\gamma : \delta\varepsilon$) = Rechteck $\alpha\beta \cdot \gamma\zeta$: Rechteck $\alpha\delta \cdot \varepsilon\zeta$. Zieht man nun durch $\varkappa$ zu $\alpha\zeta$ die Parallele $\varkappa\mu$, so ist $\beta\gamma : \delta\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\beta\gamma : \varkappa\nu$ und $\varkappa\nu : \varkappa\mu$ und $\varkappa\mu : \delta\varepsilon$, ferner Rechteck $\alpha\beta \cdot \gamma\zeta$: Rechteck $\alpha\delta \cdot \varepsilon\zeta$ aus $\beta\alpha : \alpha\delta$ und $\gamma\zeta : \zeta\varepsilon$; wird mithin $\beta\alpha : \alpha\delta = \nu\varkappa : \varkappa\mu$ weggenommen, so ist

$\gamma\zeta : \zeta\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\beta\gamma : \varkappa\nu$ (d. h. $\vartheta\gamma : \varkappa\vartheta$) und $\varkappa\mu : \delta\varepsilon$ (d. h. $\varkappa\eta : \eta\varepsilon$);

folglich ist die Linie durch die Punkte ϑ, η, ζ eine gerade. Zieht man nämlich durch ε zu $\vartheta\gamma$ die Parallele $\varepsilon\xi$ und verlängert $\vartheta\eta$ bis ξ, so ist $\varkappa\eta : \eta\varepsilon = \varkappa\vartheta : \varepsilon\xi$; ferner verwandelt sich das aus $\gamma\vartheta : \vartheta\varkappa$ und $\vartheta\varkappa : \varepsilon\xi$ zusammengesetzte Verhältniss in $\gamma\vartheta : \varepsilon\xi$, und es ist $\gamma\zeta : \zeta\varepsilon = \gamma\vartheta : \varepsilon\xi$, folglich ist offenbar, weil $\gamma\vartheta \parallel \varepsilon\xi$, die durch ϑ, ξ, ζ gehende Linie eine gerade, daher auch die durch ϑ, η, ζ gehende Linie eine gerade.

Liegen die Punkte α, β, γ, δ, ε, ζ, [*Command.* CXXXI.] ϑ auf geraden Linien, die sich durchschneiden, so dass $\alpha\delta : \delta\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma$, so ist die Linie, die durch die Punkte α, η, ϑ geht, eine gerade.

Ἤχθω διὰ τοῦ η τῇ αδ παράλληλος ἡ κλ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν λη, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ κη πρὸς τὴν ημ, καὶ ὡς ἄρα ἡ κλ πρὸς τὴν λη οὕτως ἡ κη πρὸς τὴν ημ, καὶ λοιπὴ ἡ ηλ πρὸς λοιπὴν τὴν λμ ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς τὴν λη, τουτέστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δγ. ἐναλλάξ[1]) ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν ηλ οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν λμ, τουτέστιν ἡ δθ πρὸς θλ· καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ηλ τῇ αδ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν α, η, θ σημείων. τοῦτο γὰρ φανερόν.

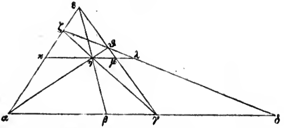
Πάλιν ἐὰν ᾖ καταγραφὴ, καὶ παράλληλος ἡ δζ τῇ βγ. γίνεται ἴση ἡ αβ τῇ βγ. ἔστω οὖν ἴση· ὅτι παράλληλος· Ἔστι δὲ· ἐὰν γὰρ διὰ τὴν εβ θιῶ τῇ ηβ ἴσην τὴν βθ, καὶ ἐπιζεύξω τὰς αθ, θγ, γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ αθγη, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζε, ἑκάτερα γὰρ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θη πρὸς τὴν ηε λόγος· ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αγ.

Ἔστω καταγραφὴ, καὶ τῶν αβ, βγ τρίτη ἀνάλογον[2])· ἔστω ἡ βδ· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ. Ἐκβεβλήσθω ἡ εβ, καὶ διὰ τοῦ α τῇ δζ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ακ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γκ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βα

---

[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἀνάλογον.

[2]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben κατὰ τῶν — μέση ἀνάλογον.



Man ziehe durch η zu $\alpha\delta$ die Parallele $\varkappa\lambda$. Da nun

$\alpha\delta : \delta\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma,$

aber $\alpha\delta : \delta\gamma = \varkappa\lambda : \lambda\eta,$

und $\alpha\beta : \beta\gamma = \varkappa\eta : \eta\mu,$

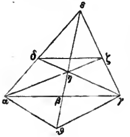
so ist $\varkappa\lambda : \lambda\eta = \varkappa\eta : \eta\mu,$

folglich $\eta\lambda : \lambda\mu = \varkappa\lambda : \lambda\eta = \alpha\delta : \delta\gamma.$

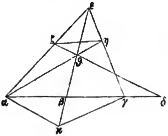
Demnach ist $\alpha\delta : \eta\lambda = \delta\gamma : \lambda\mu = \delta\vartheta : \vartheta\lambda,$

und da $\eta\lambda \parallel \alpha\delta$, so ist offenbar die durch α, η, ϑ gehende Linie eine gerade.

Durchschneiden sich wiederum gerade [*Command. CXXXII.*] Linien, und ist $\delta\zeta \parallel \beta\gamma$, alsdann ist $\alpha\beta = \beta\gamma$. Wird aber letzteres vorausgesetzt, so lässt sich beweisen, dass $\delta\zeta \parallel \beta\gamma$.



Dies findet statt, denn macht man $\beta\vartheta = \eta\beta$ und zieht $\alpha\vartheta$, $\vartheta\gamma$, so erhält man das Parallelogramm $\alpha\vartheta\gamma\eta$; deshalb ist $\alpha\delta : \delta\varepsilon = \gamma\zeta : \zeta\varepsilon$, indem ein jedes dieser Verhältnisse $= \vartheta\eta : \eta\varepsilon$, folglich $\delta\zeta \parallel \alpha\gamma$.



Bleibt [*Command. CXXXIII.*] dieselbe Voraussetzung und ist zu $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ die dritte Proportionale $\beta\delta$, so ist $\zeta\eta \parallel \alpha\gamma$.

Man verlängere $\varepsilon\beta$, ziehe durch α zu $\delta\zeta$ die Parallele $\alpha\varkappa$ und verbinde $\gamma\varkappa$. Da nun

$\gamma\beta : \beta\alpha = \alpha\beta : \beta\delta$

οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἡ κβ πρὸς τὴν βθ, καὶ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς τὴν βα οὕτως ἡ κβ πρὸς τὴν βθ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αθ τῇ κγ. ἔστιν οὖν πάλιν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζε οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν ηε, ἑκάτερα γὰρ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς τὴν θε, ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αδ.

Ἔστω βωμίσκος ἡ αβγδεζη, καὶ ἔστω παράλληλος ἡ μὲν δε τῇ βγ, ἡ δὲ εη τῇ βζ· ὅτι καὶ ἡ δζ τῇ γη παράλληλός ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, δγ, ζη· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ δβε τρίγωνον τῷ δγε τριγώνῳ· κοινὸν προσκείσθω τὸ δαε τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ αβε τρίγωνον ὅλῳ τῷ γδα τριγώνῳ ἴσον ἐστὶν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βζ τῇ εη, ἴσον ἐστὶ τὸ βζε τρίγωνον τῷ βζη τριγώνῳ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ αβζ τρίγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ αβε τρίγωνον λοιπῷ τῷ αηζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶν· ἀλλὰ τὸ αβε τρίγωνον τῷ αγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ αγδ ἄρα τρίγωνον τῷ αζη τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ· κοινὸν προσκείσθω τὸ αγη τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ γδη τρίγωνον ὅλῳ τῷ γζη τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ· καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς γη, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ γη τῇ δζ.

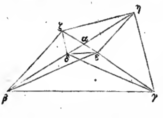
Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐν αὐτῷ διήχθωσαν αἱ αδ, αε, καὶ τῇ βγ παράλληλος ἤχθω ἡ ζη, καὶ κεκλάσθω ἡ ζθη, ἔστω δὲ ὡς ἡ βθ πρὸς τὴν θγ οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θε· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ κλ τῇ βγ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βθ πρὸς τὴν θγ οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θε, λοιπὴ ἄρα ἡ βδ πρὸς λοιπὴν τὴν γε ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς τὴν θε· ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν εγ οὕτως ἐστὶν ἡ ζμ πρὸς νη, [καὶ ὡς ἄρα ἡ ζμ πρὸς νη][1]) οὕτως ἐστὶν ἡ δθ πρὸς τὴν θε· ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς τὴν δθ οὕτως ἡ νη πρὸς τὴν θε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ζμ πρὸς τὴν δθ οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ζκ πρὸς τὴν κθ, ὡς δὲ ἡ ην πρὸς τὴν θε οὕτως ἐστὶν ἡ ηλ πρὸς τὴν λθ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς τὴν κθ οὕτως ἐστὶν ἡ ηλ πρὸς τὴν λθ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ κλ τῇ ηζ, ὥστε καὶ τῇ γβ.

Εἰς δύο εὐθείας τὰς βαε, δαη ἀπὸ τοῦ θ σημείου δύο διήχθωσαν εὐθεῖαι αἱ δθ, θε, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν δθ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ δγ, βθ οὕτω τὸ ὑπὸ θη, ζε πρὸς τὸ ὑπὸ θε, ζη· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν γ, α, ζ. Ἤχθω διὰ τοῦ θ τῇ γα παράλληλος ἡ κλ καὶ συμπιπτέτω ταῖς αβ, αδ κατὰ

[1]) Einschaltung von Commandin.

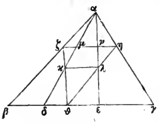
und $\alpha\beta : \beta\delta = \varkappa\beta : \beta\vartheta$,
so ist $\gamma\beta : \beta\alpha = \varkappa\beta : \beta\vartheta$,
mithin $\alpha\vartheta \parallel \varkappa\gamma$.
Ferner ist $\alpha\zeta : \zeta\varepsilon = \gamma\eta : \eta\varepsilon$,
da ein jedes der Verhältnisse $= \varkappa\vartheta : \vartheta\varepsilon$,
mithin $\zeta\eta \parallel \alpha\delta$.

Hat man die altarförmige Figur [*Command.* CXXXIV.] $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ und ist $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$, $\varepsilon\eta \parallel \beta\zeta$, so ist $\delta\zeta \parallel \gamma\eta$.



Man ziehe $\beta\varepsilon$, $\delta\gamma$, $\zeta\eta$, so ist $\triangle\,\delta\beta\varepsilon = \triangle\,\delta\gamma\varepsilon$, mithin wenn $\triangle\,\delta\alpha\varepsilon$ hinzugenommen wird, $\triangle\,\alpha\beta\varepsilon = \triangle\,\gamma\delta\alpha$. Da ferner $\beta\zeta \parallel \varepsilon\eta$, so ist $\triangle\,\beta\zeta\varepsilon = \triangle\,\beta\zeta\eta$, folglich wenn $\triangle\,\alpha\beta\zeta$ subtrahirt wird, $\triangle\,\alpha\beta\varepsilon = \triangle\,\alpha\eta\zeta$; aber $\triangle\,\alpha\beta\varepsilon = \triangle\,\alpha\gamma\delta$, mithin $\triangle\,\alpha\gamma\delta = \triangle\,\alpha\zeta\eta$; nimmt man $\triangle\,\alpha\gamma\eta$ hinzu, so ist $\triangle\,\gamma\delta\eta = \triangle\,\gamma\zeta\eta$. Diese liegen aber auf derselben Basis, folglich $\gamma\eta \parallel \delta\zeta$.

Zieht man in dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die [*Command.* CXXXV.] Linien $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, und $\zeta\eta \parallel \beta\gamma$, und verbindet ζ, η mit ϑ, so dass $\beta\vartheta : \vartheta\gamma = \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$, so ist $\varkappa\lambda \parallel \beta\gamma$.



Da $\beta\vartheta : \vartheta\gamma = \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$,
so ist $\beta\delta : \gamma\varepsilon = \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$;
aber $\beta\delta : \gamma\varepsilon = \zeta\mu : \nu\eta$,
mithin $\zeta\mu : \nu\eta = \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$,
und $\zeta\mu : \delta\vartheta = \nu\eta : \vartheta\varepsilon$.
Nun ist $\zeta\mu : \delta\vartheta = \zeta\varkappa : \varkappa\vartheta$,
und $\nu\eta : \vartheta\varepsilon = \eta\lambda : \lambda\vartheta$,
folglich $\zeta\varkappa : \varkappa\vartheta = \eta\lambda : \lambda\vartheta$,
daher $\varkappa\lambda \parallel \eta\zeta$, mithin auch $\varkappa\lambda \parallel \gamma\beta$.

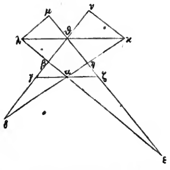
Werden vom Punkte ϑ aus durch [*Command.* CXXXVI.] die Linien $\beta\alpha\varepsilon$, $\delta\alpha\eta$ die Geraden $\delta\vartheta$, $\vartheta\varepsilon$ gezogen, und ist Rechteck $\delta\vartheta\,.\,\beta\gamma$: Rechteck $\delta\gamma\,.\,\beta\vartheta$ = Rechteck $\vartheta\eta\,.\,\zeta\varepsilon$: Rechteck $\vartheta\varepsilon\,.\,\zeta\eta$, so ist die Linie, die durch die Punkte γ, α, ζ geht, eine gerade.

τὰ κ, λ σημεῖα, καὶ διὰ τοῦ λ τῇ αδ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εϑ ἐπὶ τὸ μ, διὰ δὲ τοῦ κ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ κν καὶ ἐκβληθῇ ἡ δϑ ἐπὶ τὸ ν. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰς παραλλήλους γίνεται ὡς ἡ δϑ πρὸς τὴν ϑν οὕτως ἡ δγ πρὸς τὴν γβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δϑ, γβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δγ, ϑν. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ δγ, βϑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ δϑ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ δγ, βϑ οὕτω τὸ ὑπὸ γδ, ϑν πρὸς τὸ ὑπὸ δγ, βϑ, τουτέστιν ἡ ϑν πρὸς ϑβ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ϑδ, βγ πρὸς τὸ ὑπὸ δγ, βϑ ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ϑη, ζε πρὸς τὸ ὑπὸ ϑε, ζη, ὡς δὲ ἡ ϑν πρὸς ϑβ οὕτως ἡ κϑ πρὸς ϑλ, τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ἡ ηϑ πρὸς τὴν ϑμ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ϑη, ζε πρὸς τὸ ὑπὸ ϑμ, ζε, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ϑη, ζε πρὸς τὸ ὑπὸ ϑε, ζη οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ϑη, ζε πρὸς τὸ ὑπὸ ϑμ, ζε· ἴσον ἄρα ἐστὶν [τὸ ὑπὸ ϑε, ζη τῷ ὑπὸ ϑμ, ζε, καὶ ὡς ἄρα][1] ἡ ϑμ πρὸς τὴν ϑε οὕτως ἡ ηζ πρὸς τὴν ζε. συνϑέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ με πρὸς τὴν εη οὕτως ἡ ϑε πρὸς τὴν εζ· ἀλλ' ὡς ἡ με πρὸς τὴν εη οὕτως ἐστὶν ἡ λε πρὸς εα, καὶ ὡς ἄρα ἡ λε πρὸς τὴν εα οὕτως ἡ ϑε πρὸς τὴν εζ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ κλ· ἀλλὰ καὶ ἡ γα· εὐϑεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ γαζ· ὅπερ ἔδει: —

Τὰ δὲ πτωτικὰ αὐτοῦ ὁμοίως τοῖς προγεγραμμένοις, ὧν ἐστιν ἀναστρόφιον.

[Ἔστω] τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τῇ βγ παράλληλος ἡ αδ, καὶ διαχϑεῖσα ἡ δε τῇ βγ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ε σημεῖον· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ δε, ζη πρὸς τὸ ὑπὸ εζ, ηδ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βε.

[1] Einschaltung von *Commandin*.



Man ziehe durch ϑ zu $\gamma\alpha$ die Parallele $x\lambda$, welche die Linien $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ in den Punkten x, λ schneidet, und durch λ zu $\alpha\delta$ die Parallele $\lambda\mu$ und verlängere $\varepsilon\vartheta$ bis μ, ebenso durch x zu $\alpha\beta$ die Parallele $x\nu$ und verlängere $\delta\vartheta$ bis ν. Da nun wegen der Parallelen $\delta\vartheta : \vartheta\nu = \delta\gamma : \gamma\beta$, so ist Rechteck $\delta\vartheta . \gamma\beta =$ Rechteck $\delta\gamma . \vartheta\nu$. Bildet man ein anderes Rechteck $\delta\gamma . \beta\vartheta$, so ist

$$\text{Rechteck } \delta\vartheta . \gamma\beta : \text{Rechteck } \delta\gamma . \beta\vartheta = \text{Rechteck } \delta\gamma . \vartheta\nu : \text{Rechteck } \delta\gamma . \beta\vartheta = \vartheta\nu : \vartheta\beta.$$

Nun ist nach der Annahme

$$\text{Rechteck } \delta\vartheta . \beta\gamma : \text{Rechteck } \delta\gamma . \beta\vartheta = \text{Rechteck } \vartheta\eta . \zeta\varepsilon : \text{Rechteck } \vartheta\varepsilon . \zeta\eta,$$

und ferner $\vartheta\nu : \vartheta\beta = x\vartheta : \vartheta\lambda$
$= \eta\vartheta : \vartheta\mu$
$=$ Rechteck $\vartheta\eta . \zeta\varepsilon$: Rechteck $\vartheta\mu . \zeta\varepsilon$,

mithin Rechteck $\vartheta\eta . \zeta\varepsilon$: Rechteck $\vartheta\varepsilon . \zeta\eta =$ Rechteck $\eta\vartheta . \zeta\varepsilon$: Rechteck $\vartheta\mu . \zeta\varepsilon$,

folglich Rechteck $\vartheta\varepsilon . \zeta\eta =$ Rechteck $\vartheta\mu . \zeta\varepsilon$,

und daher $\vartheta\mu : \vartheta\varepsilon = \zeta\eta : \zeta\varepsilon$.

Hieraus ergiebt sich durch Zusammenfassen

$\mu\varepsilon : \eta\varepsilon = \vartheta\varepsilon : \varepsilon\zeta$,

aber $\mu\varepsilon : \varepsilon\eta = \lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha$,

mithin $\lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha = \vartheta\varepsilon : \varepsilon\zeta$,

folglich $\alpha\zeta \parallel x\lambda$;

aber auch $\gamma\alpha \parallel x\lambda$,

daher ist $\gamma\alpha\zeta$ eine gerade Linie, was zu beweisen war.

Die besondern Fälle dieses Satzes werden auf ähnliche Weise wie das Vorhergehende, wovon er die Umkehrung ist, dargethan.

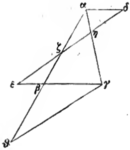
Hat man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und [*Command. CXXXVII.*] zieht $\alpha\delta \parallel \beta\gamma$, und schneidet die durchgelegte Linie $\delta\varepsilon$ die $\beta\gamma$ im Punkte ε, so ist Rechteck $\delta\varepsilon . \zeta\eta$: Rechteck $\varepsilon\zeta . \eta\delta = \gamma\beta : \beta\varepsilon$.

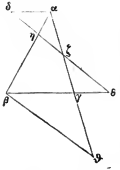
Ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ δε παράλληλος ἡ γθ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ ἐπὶ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ γθ πρὸς τὴν ζη, ὡς δὲ ἡ γα πρὸς τὴν αη οὕτως ἐστὶν ἡ εδ πρὸς τὴν δη, καὶ ὡς ἄρα ἡ εδ πρὸς τὴν δη οὕτως ἐστὶν ἡ θγ πρὸς τὴν ζη· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γθ, δη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εδ, ζη. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ εζ, ηδ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ δε, ζη πρὸς τὸ ὑπὸ δη, εζ οὕτω τὸ ὑπὸ γθ, δη πρὸς τὸ ὑπὸ δη, εζ, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς εζ, τουτέστιν ἡ γβ πρὸς βε. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ δε, ζη πρὸς τὸ ὑπὸ εζ, ηδ οὕτως ἡ γβ πρὸς βε. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἀχθῇ ἡ αδ παράλληλος καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐκτὸς τοῦ γ, ὡς ἐπὶ τὸ ε, ἡ δε.[1])

Ἀποδεδειγμένων νῦν τούτων, ἔσται δεῖξαι, ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ αβ, γδ καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες αἱ αδ, αζ, βγ, βζ καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ εδ, εγ, ὅτι γίνεται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν η, μ, κ. Ἐπεὶ γὰρ τρίγωνον τὸ δαζ καὶ τῇ δζ παράλληλος ἡ αε καὶ διῆκται ἡ εγ συμπίπτουσα τῇ δζ κατὰ τὸ γ, διὰ τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς ἡ δζ πρὸς τὴν ζγ οὕτω τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε. πάλιν ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ γβζ καὶ τῇ γδ παράλληλος ἦκται ἡ βε καὶ διῆκται ἡ δε συμπίπτουσα τῇ γζδ κατὰ τὸ δ, γίνεται ὡς ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ οὕτω τὸ ὑπὸ δε, λκ πρὸς τὸ ὑπὸ δκ, λε· ἀνάπαλιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ δζ πρὸς τὴν ζγ οὕτω τὸ ὑπὸ δκ, λε πρὸς τὸ ὑπὸ δε, λκ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δζ πρὸς τὴν ζγ οὕτω τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ δκ, λε πρὸς τὸ ὑπὸ

---

[1]) So emendirt *Commandin* diese Stelle; die Hdsch. haben: καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τὸ γ διὰ τὴν εὐθεῖαν.





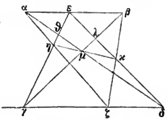
Man ziehe durch γ zu $\delta\varepsilon$ die Parallele $\gamma\vartheta$ und verlängere $\alpha\beta$ bis ϑ. Da nun $\gamma\alpha : \alpha\eta = \gamma\vartheta : \zeta\eta$; und $\gamma\alpha : \alpha\eta = \varepsilon\delta : \delta\eta$, s. i. $\varepsilon\delta : \delta\eta = \gamma\vartheta : \zeta\eta$, mithin Rechteck $\gamma\vartheta . \delta\eta$ = Rechteck $\varepsilon\delta . \zeta\eta$. Bildet man ein anderes Rechteck $\varepsilon\zeta . \eta\delta$, so ist

$$\text{Rechteck } \delta\varepsilon . \zeta\eta : \text{Rechteck } \varepsilon\zeta . \eta\delta = \text{Rechteck } \gamma\vartheta . \delta\eta : \text{Rechteck } \varepsilon\zeta . \eta\delta$$
$$= \gamma\vartheta : \varepsilon\zeta$$
$$= \gamma\beta : \beta\varepsilon,$$

mithin Rechteck $\delta\varepsilon . \zeta\eta$: Rechteck $\varepsilon\zeta . \eta\delta = \gamma\beta : \beta\varepsilon$.

Dasselbe findet statt, wenn die Parallele $\alpha\delta$ nach der entgegengesetzten Seite und von δ über γ hinaus z. B. nach ε die Linie $\delta\varepsilon$ gezogen wird.*)

Nachdem dies gezeigt, ist zu beweisen, dass wenn die Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ von den Geraden $\alpha\delta$, $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ geschnitten und $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\gamma$ gezogen werden, die durch die Punkte η, μ, $\varkappa$ gehende Linie eine gerade ist, [*Command. CXXXVIII.*]



Da $\delta\alpha\zeta$ ein Dreieck ist und $\alpha\varepsilon \parallel \delta\zeta$ und ferner die durchgelegte Linie $\varepsilon\gamma$ die $\delta\zeta$ im Punkte γ schneidet, so ist nach dem Vorausgegangenen $\delta\zeta : \zeta\gamma$ = Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon$. Da ferner $\gamma\beta\zeta$ ein Dreieck ist und $\beta\varepsilon \parallel \gamma\delta$ und die durchgelegte Linie $\delta\varepsilon$ die $\gamma\zeta\delta$ im Punkte δ schneidet, so ist

$$\gamma\zeta : \zeta\delta = \text{Rechteck } \delta\varepsilon . \lambda\varkappa : \text{Rechteck } \delta\varkappa . \lambda\varepsilon,$$

*) Alsdann ist Rechteck $\delta\varepsilon . \zeta\eta$: Rechteck $\varepsilon\zeta . \eta\delta = \beta\gamma : \gamma\varepsilon$.

δε, κλ. ἀνῆκται εἰς τὸ πρὸ ἑνός, ἐπεὶ οὖν εἰς δύο εὐθείας τὰς γμλ, δμθ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ εγ, εδ καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε οὕτω τὸ ὑπὸ δκ, ελ πρὸς τὸ ὑπὸ δε, λκ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν η, μ, κ, τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν αἱ αβ, γδ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ ν· ὅτι πάλιν εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν η, μ, κ. Ἐπεὶ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς αν, αζ, αδ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ γ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ γε, γδ, γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν γν, ζδ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν νδ, γζ. πάλιν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς βν, βγ, βζ δύο εἰσὶ διηγμέναι αἱ δε, δν, ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ νγ, ζδ πρὸς τὸ ὑπὸ νδ, ζγ οὕτω τὸ ὑπὸ δκ, ελ πρὸς τὸ ὑπὸ δε, κλ· ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ νγ, ζδ πρὸς τὸ ὑπὸ νδ, γζ οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γε, θη πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ δκ, ελ πρὸς τὸ ὑπὸ δε, κλ. ἀνῆκται[1]) εἰς ὃ καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων· διὰ δὴ τὸ προγεγράμμενον εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν η, μ, κ.

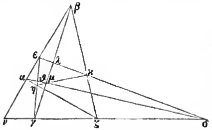
Ἔστω παράλληλος ἡ αβ τῇ γδ, καὶ διήχθωσαν αἱ αε, γβ καὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς βη τὸ ζ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν δε πρὸς τὴν εγ οὕτω τὸ ὑπὸ γβ, ηζ πρὸς τὸ ὑπὸ ζβ, γη· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν

[1]) Die Hdsch. haben ἀπῆκται.

mithin $\zeta\delta : \gamma\zeta =$ Rechteck $\delta\varkappa . \lambda\varepsilon$: Rechteck $\delta\varepsilon . \lambda\varkappa$.
Es war aber $\delta\zeta : \zeta\gamma =$ Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon$,
folglich Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon =$ Rechteck $\delta\varkappa . \lambda\varepsilon$: Rechteck $\delta\varepsilon . \lambda\varkappa$.

Der Satz ist also auf den vorletzten zurückgeführt, da nämlich die beiden Geraden $\gamma\mu\lambda$, $\delta\mu\vartheta$ von den beiden Geraden $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ durchschnitten werden und Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon =$ Rechteck $\delta\varkappa . \lambda\varepsilon$: Rechteck $\delta\varepsilon . \lambda\varkappa$; es ist demnach die durch die Punkte η, μ, $\varkappa$ gehende Linie eine gerade, wie vorher nachgewiesen ist.

Wenn aber auch die Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ [*Command.* CXXXIX.] nicht parallel sind und sich im Punkte ν schneiden, so ist ebenfalls die Linie, die durch die Punkte η, μ, $\varkappa$ geht, eine gerade.



Da die drei Geraden $\alpha\nu$, $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$ von den beiden von dem Punkte γ ausgehenden Linien $\gamma\varepsilon$, $\gamma\delta$ geschnitten werden, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon$ $\vartheta\eta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon =$ Rechteck $\gamma\nu . \zeta\delta$: Rechteck $\nu\delta . \gamma\zeta$. Da ferner die drei Linien $\beta\nu$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ von den beiden vom Punkte δ ausgehenden Linien $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$ geschnitten werden, so ist

Rechteck $\nu\gamma . \zeta\delta$: Rechteck $\nu\delta . \zeta\gamma =$ Rechteck $\delta\varkappa . \varepsilon\lambda$: Rechteck $\delta\varepsilon . \varkappa\lambda$.

Es ist aber nachgewiesen, dass

Rechteck $\nu\gamma . \zeta\delta$: Rechteck $\nu\delta . \zeta\gamma =$ Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon$,

mithin Rechteck $\gamma\varepsilon . \eta\vartheta$: Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon =$ Rechteck $\delta\varkappa . \varepsilon\lambda$: Rechteck $\delta\varepsilon . \varkappa\lambda$.

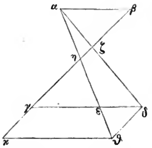
Demnach ist der Satz auf das zurückgeführt, was für die Parallelen stattfindet, folglich ist nach dem Vorhergehenden die Linie, die durch die Punkte η, μ, $\varkappa$ geht, eine gerade.

Werden die Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ von den [*Command.* CXL.] Geraden $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$ durchschnitten und liegt auf $\beta\eta$ der Punkt ζ so, dass $\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma =$ Rechteck $\gamma\beta . \eta\zeta$: Rechteck $\zeta\beta . \gamma\eta$, so ist die durch α, ζ, δ gehende Linie eine gerade.

ἡ διὰ τῶν α, ζ, δ. Ἤχθω διὰ τοῦ δ τῇ βγ παράλληλος ἡ δθ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αε ἐπὶ τὸ θ, διὰ δὲ τοῦ θ τῇ γδ παράλληλος ἡ θκ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βγ ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δε πρὸς τὴν εγ οὕτω τὸ ὑπὸ γβ. ζη πρὸς τὸ ὑπὸ ζβ, γη. ὡς δὲ ἡ δε πρὸς τὴν εγ οὕτως ἐστὶν ἥ τε δθ πρὸς τὴν γη καὶ τὸ ὑπὸ δθ. βζ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γη. βζ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν βγ, ζη τῷ ὑπὸ δθ, βζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βζ οὕτως ἡ δθ, τουτέστιν ὡς ἡ γκ, πρὸς τὴν ηζ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ κβ πρὸς ὅλην τὴν βη ἐστὶν ὡς ἡ κγ πρὸς ζη. τουτέστιν ὡς ἡ δθ πρὸς ζη. ἀλλ' ὡς ἡ κβ πρὸς βη ἐν παραλλήλῳ οὕτως ἐστὶν ἡ θα πρὸς αη καὶ ἡ δθ πρὸς ζη· καὶ εἰσὶ παράλληλοι αἱ δθ. ζη· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν α, ζ, δ σημείων.

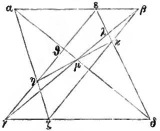
Τούτου προτεθεωρημένου. ἔστω παράλληλος ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπιπτέτωσαν εὐθεῖαι αἱ αζ, ζβ, γε, εδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, ηκ· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν α, μ, δ. Ἐπεζεύχθω ἡ δμ [καὶ] ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ βγζ ἐκτὸς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ β σημείου τῇ γδ παράλληλος ἦκται ἡ βε καὶ διῆκται ἡ εδ, γίνεται ὡς ἡ γζ πρὸς εδ οὕτω τὸ ὑπὸ δε, κλ πρὸς τὸ ὑπὸ ελ, κδ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ δε, κλ πρὸς τὸ ὑπὸ δκ, ελ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ γη, θε πρὸς τὸ ὑπὸ γε, ηθ. [ἐπεὶ οὖν] εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς γλ, δθ, ηκ δύο εἰσὶ διηγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ε αἱ εγ, εδ· καὶ ὡς ἄρα ἡ εδ πρὸς ζγ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ γε, ηθ πρὸς τὸ ὑπὸ γη, θε· καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν δ. μ, θ. διὰ τὸ προγεγραμμένον ἄρα καὶ ἡ διὰ τῶν α. μ, δ ἐστὶν εὐθεῖα.

Εἰς δύο εὐθείας τὰς αβ, αγ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ δ δύο διήχθωσαν αἱ δβ, δε, καὶ ἐπ' αὐτῶν εἰλήφθω σημεῖα τὰ η, θ, ἔστω δὴ ὡς τὸ ὑπὸ εη, ζδ πρὸς τὸ ὑπὸ δε, ηζ οὕτω τὸ ὑπὸ βθ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδ, γθ· ὅτι εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν α. η, θ. Ἤχθω διὰ τοῦ η τῇ βδ παράλληλος ἡ κλ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ εη. ζδ πρὸς τὸ ὑπὸ δε, ζη οὕτω τὸ ὑπὸ βθ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδ, γδ· ἀλλὰ ὁ [τοῦ] ὑπὸ εη, ζδ



Man ziehe durch δ zu $\beta\gamma$ die Parallele $\delta\vartheta$ und verlängere $\alpha\varepsilon$ bis ϑ; man ziehe ferner durch ϑ zu $\gamma\delta$ die Parallele $\vartheta\varkappa$ und verlängere $\beta\gamma$ bis $\varkappa$. Da nun $\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma =$ Rechteck $\gamma\beta . \zeta\eta$: Rechteck $\zeta\beta . \gamma\eta$, und $\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \delta\vartheta : \gamma\eta$ = Rechteck $\delta\vartheta . \beta\zeta$: Rechteck $\gamma\eta . \beta\zeta$, so ist Rechteck $\gamma\beta . \zeta\eta$ = Rechteck $\delta\vartheta . \beta\zeta$, folglich $\gamma\beta : \beta\zeta = \delta\vartheta$ (d. h. $\gamma\varkappa$) : $\eta\zeta$ und $\varkappa\beta : \beta\eta = \gamma\varkappa : \eta\zeta = \delta\vartheta : \eta\zeta$. Aber $\varkappa\beta : \beta\eta = \vartheta\alpha : \alpha\eta = \delta\vartheta : \eta\zeta$, und da $\delta\vartheta \parallel \eta\zeta$, so ist die durch α, ζ, δ gehende Linie eine gerade.

Nachdem dies vorausgeschickt, sollen [Command. CXLI.] die Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ von den Geraden $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ durchschnitten werden; zieht man nun $\beta\gamma$, $\eta\varkappa$, so ist die Linie, die durch die Punkte α, μ, δ geht, eine gerade.



Man ziehe $\delta\mu$ und verlängere sie bis ϑ. Da ausserhalb des Dreiecks $\beta\gamma\zeta$ von der Spitze β die Gerade $\beta\varepsilon$ zu $\gamma\delta$ parallel gezogen und $\varepsilon\delta$ hindurchgelegt ist, so ist $\gamma\zeta : \varepsilon\delta$ = Rechteck $\delta\varepsilon . \varkappa\lambda$: Rechteck $\varepsilon\lambda . \varkappa\delta$; aber Rechteck $\delta\varepsilon . \varkappa\lambda$: Rechteck $\varepsilon\lambda . \varkappa\delta$ = Rechteck $\gamma\eta . \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\gamma\varepsilon\, \eta\vartheta$, da die drei Geraden $\gamma\lambda$, $\delta\vartheta$, $\eta\varkappa$ von den beiden vom Punkte ε ausgehenden Geraden $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ durchschnitten werden, mithin

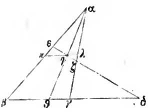
$$\varepsilon\delta : \gamma\zeta = \text{Rechteck } \gamma\varepsilon . \eta\vartheta : \text{Rechteck } \gamma\eta . \vartheta\varepsilon,$$

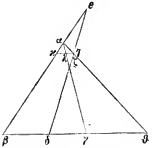
und da die Linie, die durch die Punkte δ, μ, ϑ geht, eine gerade ist, so ist auch nach dem Vorhergehenden die durch die Punkte α, μ, δ gehende eine gerade.

Werden die beiden Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ [Command. CXLII.] vom Punkte δ aus durch die beiden Geraden $\delta\beta$, $\delta\varepsilon$ durchschnitten, und nimmt man auf denselben die Punkte η, ϑ an, so dass Rechteck $\varepsilon\eta . \zeta\delta$: Rechteck $\delta\varepsilon . \eta\zeta$ = Rechteck $\beta\vartheta . \gamma\delta$: Rechteck $\beta\delta . \gamma\vartheta$, so ist die Linie, welche durch die Punkte α, η, ϑ geht, eine gerade.

πρὸς τὸ ὑπὸ δε, ηζ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ηε πρὸς εδ, τουτέστιν ἡ κη πρὸς βδ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ δζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς τὴν ηλ· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ βθ, γδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδ, γθ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ θβ πρὸς βδ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ δγ πρὸς γθ· καὶ ὁ τῆς κη ἄρα πρὸς βδ καὶ τοῦ τῆς γδ πρὸς ηλ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς βθ πρὸς βδ καὶ τοῦ τῆς δγ πρὸς γθ. ὁ δὲ τῆς κη πρὸς βδ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς κη πρὸς βθ καὶ τοῦ τῆς βθ πρὸς βδ· ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς κη πρὸς βθ καὶ τοῦ τῆς βθ πρὸς βδ καὶ ἔτι τοῦ τῆς δγ πρὸς ηλ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς βθ πρὸς βδ καὶ τοῦ τῆς δγ πρὸς γθ. κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς βθ πρὸς βδ λόγος, λοιπὸς ἄρα ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς κη πρὸς βθ καὶ τοῦ τῆς δγ πρὸς ηλ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς δγ πρὸς τὴν γθ, τουτέστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς δγ πρὸς τὴν ηλ καὶ τοῦ τῆς ηλ πρὸς τὴν θγ. καὶ πάλιν κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς δγ πρὸς τὴν ηλ λόγος, λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς κη πρὸς τὴν βθ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ηλ πρὸς τὴν θγ. καὶ ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ κη πρὸς τὴν ηλ οὕτως ἡ βθ πρὸς τὴν θγ· καὶ εἰσὶν αἱ κλ, βγ παράλληλοι· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν α, η, θ σημείων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω παράλληλος ἡ αβ τῇ γδ, ἀλλὰ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς βν, βγ, βζ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ δε, δν, ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ νδ, γζ πρὸς τὸ ὑπὸ νγ, δζ οὕτω τὸ ὑπὸ δε, κλ πρὸς τὸ ὑπὸ ελ, κδ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ εδ, κλ πρὸς τὸ ὑπὸ ελ, κδ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ εθ, γη πρὸς τὸ ὑπὸ εγ, θη, πάλιν γὰρ εἰς τρεῖς τὰς γλ, δθ, ηκ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ε δύο ἠγμέναι εἰσὶν αἱ εγ, εδ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ εθ, γη πρὸς τὸ ὑπὸ εγ, θη οὕτω τὸ ὑπὸ νδ, γζ πρὸς τὸ ὑπὸ νγ, δζ· διὰ [δὴ] τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν α, θ, δ, καὶ ἡ διὰ τῶν α, μ, δ ἄρα εὐθεῖά ἐστιν.



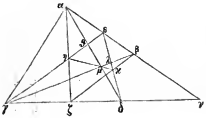


Man ziehe durch η zu $\beta\delta$ die Parallele $\varkappa\lambda$. Da nun

Rechteck $\varepsilon\eta \,.\, \zeta\delta$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \zeta\eta$ = Rechteck $\beta\vartheta \,.\, \gamma\delta$: Rechteck $\beta\delta \,.\, \gamma\vartheta$,

aber das Verhältniss von Rechteck $\varepsilon\eta \,.\, \zeta\delta$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \eta\zeta$ zusammengesetzt ist aus $\eta\varepsilon : \varepsilon\delta$ (d. h. $\varkappa\eta : \beta\delta$) und aus $\delta\zeta : \zeta\eta$ (d. h. $\gamma\delta : \eta\lambda$), und das Verhältniss von Rechteck $\beta\vartheta \,.\, \gamma\delta$: Rechteck $\beta\delta \,.\, \gamma\vartheta$ zusammengesetzt ist aus $\beta\vartheta : \beta\delta$ und aus $\gamma\delta : \gamma\vartheta$, so ist das aus $\varkappa\eta : \beta\delta$ und $\gamma\delta : \eta\lambda$ zusammengesetzte Verhältniss gleich dem aus $\beta\vartheta : \beta\delta$ und $\gamma\delta : \gamma\vartheta$. Aber $\varkappa\eta : \beta\delta$ ist aus $\varkappa\eta : \beta\vartheta$ und $\beta\vartheta : \beta\delta$ zusammengesetzt, mithin ist das aus $\varkappa\eta : \beta\vartheta$, $\beta\vartheta : \beta\delta$ und $\gamma\delta : \eta\lambda$ zusammengesetzte Verhältniss = $\beta\vartheta : \beta\delta$ und $\gamma\delta : \gamma\vartheta$. Wird das gemeinsame Verhältniss $\beta\vartheta : \beta\delta$ weggenommen, so ist das aus $\varkappa\eta : \beta\vartheta$ und $\gamma\delta : \eta\lambda$ zusammengesetzte Verhältniss = $\gamma\delta : \gamma\vartheta$ d. h. gleich dem aus $\gamma\delta : \eta\lambda$ und $\eta\lambda : \gamma\vartheta$ zusammengesetzten Verhältniss. Wird wiederum das gemeinsame Verhältniss $\delta\gamma : \eta\lambda$ weggenommen, so ist $\varkappa\eta : \beta\vartheta = \eta\lambda : \gamma\vartheta$ oder $\varkappa\eta : \eta\lambda = \beta\vartheta : \vartheta\gamma$; da nun $\varkappa\lambda \parallel \beta\gamma$, so wird die durch die Punkte α, η, ϑ gehende Linie eine gerade sein.

Sind nun die Geraden $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ nicht [*Command. CXLIII*] parallel und schneiden sich im Punkte ν, (so werden die Punkte α, μ, δ ebenfalls in einer geraden Linie liegen.



Da die drei Geraden ν, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ vom Punkte δ aus durch die beiden Geraden $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$ durchschnitten werden, so ist Rechteck $\nu\delta \,.\, \gamma\zeta$: Rechteck $\nu\gamma \,.\, \delta\zeta$ = Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varkappa\lambda$: Rechteck $\varepsilon\lambda \,.\, \varkappa\delta$, aber

Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τῇ βγ παράλληλος ἤχθω ἡ αδ, καὶ διήχθωσαν αἱ δε, ζη, ἔστω δὲ ὡς τὸ ἀπὸ εβ πρὸς τὸ ὑπὸ εγβ οὕτως ἡ βη πρὸς τὴν ηγ· ὅτι ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ βδ, γίνεται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν θ, κ, γ. Ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εβ πρὸς τὸ ὑπὸ εγβ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ, κοινὸς ἄρα προςκείσθω ὁ τῆς γε πρὸς εβ λόγος ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ ὑπὸ εγβ πρὸς τὸ ὑπὸ εβγ, δι' ἴσου ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ εβ πρὸς τὸ ὑπὸ εβγ λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς εβ πρὸς τὴν βγ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς βη πρὸς ηγ καὶ τοῦ ὑπὸ εγβ πρὸς τὸ ὑπὸ εβγ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς εγ πρὸς εβ· ὥστε ὁ ἀπὰ τοῦ εβ πρὸς τὸ ὑπὸ εβγ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ βη πρὸς ηγ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ εγ πρὸς εβ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ὑπὸ εγ, βη πρὸς τὸ ὑπὸ εβ, γη. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἐστὶ διὰ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα τὸ ὑπὸ δζ, θε πρὸς τὸ ὑπὸ δε, ζθ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γε, βη πρὸς τὸ ὑπὸ γη, εβ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ δζ, θε πρὸς τὸ ὑπὸ δε, ζθ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν θ, κ, γ, τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς πτωτικοῖς τῶν ἀναστροφίων.

Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς αβ, αγ, αδ ἀπό τινος σημείου τοῦ ε δύο διήχθωσαν αἱ εζ, εβ, ἔστω δὲ ὡς ἡ εζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ θε πρὸς τὴν θη· ὅτι γίνεται καὶ ὡς ἡ βε πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ. Ἤχθω διὰ τοῦ η τῇ βε παράλληλος ἡ λκ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν θη, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ εζ πρὸς τὴν ζη οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν ηκ, ὡς δὲ ἡ εθ πρὸς τὴν θη οὕτως ἐστὶν ἡ δε πρὸς τὴν ηλ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βε πρὸς τὴν ηκ οὕτως ἐστὶν ἡ δε πρὸς

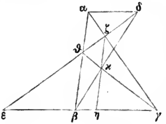
Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \varkappa\lambda$: Rechteck $\varepsilon\lambda \,.\, \varkappa\delta$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \gamma\eta$: Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \vartheta\eta$,

denn die drei Geraden $\gamma\lambda$, $\delta\vartheta$, $\eta\varkappa$ werden ebenfalls vom Punkte ε aus von den beiden Geraden $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ durchschnitten, mithin

Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \gamma\eta$: Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \vartheta\eta$ = Rechteck $\nu\delta \,.\, \gamma\zeta$: Rechteck $\nu\gamma \,.\, \delta\zeta$.

Demnach ist nach dem Vorhergegangenen die Linie, welche durch die Punkte α, ϑ, δ geht, eine gerade, daher auch die durch die Punkte α, μ, δ.

Hat man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, und ist [*Command. CXLIV.*] $\alpha\delta \parallel \beta\gamma$; zieht man ferner $\delta\varepsilon$, $\zeta\eta$, so dass Quadrat über $\varepsilon\beta$: Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\beta$ = $\beta\eta$: $\eta\gamma$, so liegen, wenn $\beta\delta$ gezogen wird, die Punkte ϑ, $\varkappa$, γ in einer geraden Linie.



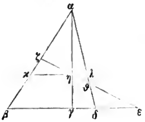
Da Quadrat über $\varepsilon\beta$: Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\beta$ = $\beta\eta$: $\eta\gamma$, so ist, wenn hiermit die Proportion $\gamma\varepsilon$: $\varepsilon\beta$ = Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\gamma$ zusammengesetzt wird, Quadrat über $\varepsilon\beta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\gamma$ (d. h. $\varepsilon\beta : \beta\gamma$) = dem aus $\beta\eta : \eta\gamma$ und Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \gamma\beta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\gamma$ (d. h. $\varepsilon\gamma : \varepsilon\beta$) zusammengesetzten Verhältniss, daher Quadrat über $\varepsilon\beta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\gamma$ = dem aus $\beta\eta : \eta\gamma$ und $\varepsilon\gamma : \varepsilon\beta$ zusammengesetzten Verhältniss = Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \beta\eta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \eta\gamma$.

Nun ist nach einem vorhergehenden Lemma

$\varepsilon\beta : \beta\gamma$ = Rechteck $\delta\zeta \,.\, \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \zeta\vartheta$,

daher Rechteck $\varepsilon\gamma \,.\, \beta\eta$: Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \eta\gamma$ = Rechteck $\delta\zeta \,.\, \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \zeta\vartheta$,

folglich liegen, wie in den besondern Fällen der umgekehrten Sätze nachgewiesen ist, die Punkte ϑ, $\varkappa$, γ in einer geraden Linie.



Werden [*Command. CXLV.*] die drei Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ durch zwei von einem Punkte ε ausgehenden Geraden $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\beta$ geschnitten, und ist $\varepsilon\zeta : \zeta\eta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\eta$, so ist auch $\beta\varepsilon : \beta\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma$.

Man ziehe durch η zu $\beta\varepsilon$ die Parallele $\lambda\varkappa$. Da nun

τὴν ηλ· ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν εδ οὕτως ἡ κη πρὸς τὴν ϱλ. ὡς δὲ ἡ κη πρὸς τὴν ηλ οὕτως ἐστὶν ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βε πρὸς τὴν εδ οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν γδ· ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δγ. τὰ δὲ πτωτικὰ ὁμοίως.

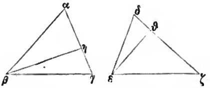
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ ἴσας ἔχοντα τὰς α, δ γωνίας· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ εδζ τρίγωνον. Ἤχθωσαν κάθετοι αἱ βη, εθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α γωνία τῇ δ, ἡ δὲ η τῇ θ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βη οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εθ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν βη οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ βη, αγ, ὡς δὲ ἡ δε πρὸς τὴν εθ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ εδζ πρὸς τὸ ὑπὸ εθ, δζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ βη, αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εδζ πρὸς τὸ ὑπὸ εθ, δζ, καὶ ἐναλλάξ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ βη, αγ πρὸς τὸ ὑπὸ εθ, δζ οὕτως ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον. ἑκατέρα γὰρ τῶν βη, εθ κάθετός ἐστιν ἑκατέρου τῶν εἰρημένων τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ οὕτως ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον.

Ἔστωσαν δὴ αἱ α, δ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅτι πάλιν γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον. Ἐκβληθῇ ἡ βα, καὶ κείσθω τῇ βα ἴση ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἐπεὶ οὖν αἱ α, δ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, γαη γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαη γωνία τῇ δ. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ ηαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ οὕτω τὸ αηγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον· ἴση δέ ἐστιν ἡ μὲν ηα τῇ αβ, τὸ δὲ ηαγ τρίγωνον τῷ αβγ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ βαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον.

	$\varepsilon\zeta : \zeta\eta = \varepsilon\vartheta : \vartheta\eta,$
aber	$\varepsilon\zeta : \zeta\eta = \varepsilon\beta : \eta\varkappa$
und	$\varepsilon\vartheta : \vartheta\eta = \delta\varepsilon : \eta\lambda,$
so ist	$\beta\varepsilon : \eta\varkappa = \delta\varepsilon : \eta\lambda$
oder	$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta = \varkappa\eta : \eta\lambda.$
Nun ist	$\varkappa\eta : \eta\lambda = \beta\gamma : \gamma\delta,$
folglich	$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta = \beta\gamma : \gamma\delta$
und	$\varepsilon\beta : \beta\gamma = \varepsilon\delta : \delta\gamma.$

Die besondern Fälle werden auf ähnliche Weise dargethan.

Sind in den beiden Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ die Winkel α und δ einander gleich, so ist Rechteck $\beta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta = \triangle\,\alpha\beta\gamma : \triangle\,\varepsilon\delta\zeta$. [*Command.* CXLVI.]

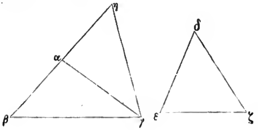


Man fälle die Senkrechten $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$. Da nun $\angle\,\alpha = \angle\,\delta$, $\angle\,\eta = \angle\,\vartheta$, so ist $\alpha\beta : \beta\eta = \delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$; aber $\alpha\beta : \beta\eta$ = Rechteck $\beta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\beta\eta\,.\,\alpha\gamma$, und $\delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$ = Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\vartheta\,.\,\delta\zeta$: folglich Rechteck $\beta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\beta\eta.\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\vartheta.\delta\zeta$, und verwechselt. Aber

Rechteck $\beta\eta\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\vartheta\,.\,\delta\zeta = \triangle\,\alpha\beta\gamma : \triangle\,\delta\varepsilon\zeta$,

denn eine jede der Geraden $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$ ist eine Höhe eines jeden der Dreiecke, mithin Rechteck $\beta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta = \triangle\,\alpha\beta\gamma$: $\triangle\,\delta\varepsilon\zeta$.

Betragen die Winkel α, δ zwei Rechte, so ist ebenfalls Rechteck $\beta\alpha\,.\,\alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\zeta = \triangle\,\alpha\beta\gamma : \triangle\,\delta\varepsilon\zeta$. [*Command.* CXLVII.]



Man verlängere $\beta\alpha$, so dass $\beta\alpha = \alpha\eta$ und ziehe $\gamma\eta$. Da nun $\angle\,\alpha + \delta = 2\,\mathrm{R}$ und $\angle\,\beta\alpha\gamma + \angle\,\gamma\alpha\eta = 2\mathrm{R}$, so ist $\angle\,\gamma\alpha\eta = \angle\,\delta$. Daher ist

Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα τὰ γ, δ, ἔστω δὲ τὸ δὶς ὑπὸ αβ, γδ ἴσον τῷ ἀπὸ γβ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ αδ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, δβ τετραγώνοις. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δὶς ὑπὸ αβ, γδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ γβ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δὶς ὑπὸ βδγ, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ αδγ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, δβ τετραγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ γδ τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ αγδ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δβ τετραγώνῳ. κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ αγ τετράγωνον, ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ αδ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, δβ τετραγώνοις.

Ἔστω τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον τῷ ἀπὸ βδ τετραγώνῳ· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς βδ ἴσον τῷ ὑπὸ αδ, δγ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς βγ ἴσον τῷ ἀπὸ δγ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς βα ἴσον τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ, ἀνάλογον[1]) καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ γδ, δα πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς βδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδγ. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ αδ πρὸς ὅλην τὴν δγ ἐστὶν ὡς δβ πρὸς τὴν βγ, συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ αδ, δγ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ δγ πρὸς τὴν γβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς γβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δγ. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ αδ πρὸς ὅλην τὴν δγ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ γδ, δα πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν αβ, τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αδ, δγ καὶ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ γ, δ, καὶ ἔστω τὸ ἀπὸ γδ τετράγωνον ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ αγ, δβ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, γβ τετραγώνοις. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ γδ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ αγ, δβ, [τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben ἀνάπαλιν.

Rechteck $\eta\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta = \triangle\,\alpha\eta\gamma : \Delta\,\delta\varepsilon\zeta$;
aber $\eta\alpha = \alpha\beta$, und $\triangle\,\eta\alpha\gamma = \triangle\,\alpha\beta\gamma$,
folglich Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\zeta = \triangle\,\alpha\beta\gamma : \triangle\,\delta\varepsilon\zeta$.

Werden auf der Geraden $\alpha\beta$ die [*Command. CXLVIII.*] beiden Punkte γ, δ angenommen, so dass 2 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\gamma\beta$, so ist Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\alpha\gamma$ + Quadrat über $\delta\beta$.

α γ δ β Da 2 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$ = Quadrat über $\gamma\beta$, so ist, wenn 2 Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\gamma$ subtrahirt wird,

2 Rechteck $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ = Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\delta\beta$.
Subtrahirt man ferner Quadrat über $\gamma\delta$, so ist

2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$ + Quadrat über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\delta\beta$.
Addirt man hierzu Quadrat über $\alpha\gamma$, so ergiebt sich

Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\alpha\gamma$ + Quadrat über $\delta\beta$.

Ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Quadrat über [*Command. CXLIX.*] $\beta\delta$, so finden die folgenden drei Gleichheiten statt: Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$, Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\beta\gamma$ = Quadrat über $\delta\gamma$, Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\beta\alpha$ = Quadrat über $\alpha\delta$.

α γ β δ Da Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$, so ist durch Zusammenlassen, Umkehrung und Verbindung der Glieder der Proportion, $\gamma\delta + \delta\alpha : \delta\alpha = \gamma\delta : \delta\beta$, mithin Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\,\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$. Da ferner $\alpha\delta : \delta\gamma = \delta\beta : \delta\gamma$, so ist durch Verbindung $\alpha\delta + \delta\gamma : \delta\gamma = \delta\gamma : \gamma\beta$, mithin Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\,\beta\gamma$ = Quadrat über $\delta\gamma$. Da endlich $\alpha\delta : \delta\gamma = \alpha\beta : \beta\delta$, so ist durch Umkehrung und Verbindung $\gamma\delta + \delta\alpha : \delta\alpha = \delta\alpha : \alpha\beta$, folglich Rechteck $(\alpha\delta + \delta\gamma)\,\beta\alpha$ = Quadrat über $\alpha\delta$.

Nimmt man auf der Geraden $\alpha\beta$ die zwei [*Command. CL.*] Punkte γ, δ so an, dass Quadrat über $\gamma\delta$ = 2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\beta$, so ist auch Quadrat über $\alpha\beta$ = Quadrat über $\alpha\delta$ + Quadrat über $\gamma\beta$.

α γ δ β Da Quadrat über $\gamma\delta$ =

αγβ][1] ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς γδ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγδ· κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ αγβ μετὰ τοῦ ἀπὸ αγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αδ· κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ βγ, ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, γβ τετραγώνοις.

Ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς βδ· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ τῆς τῶν αδ, δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βδ ἴσον τῷ ὑπὸ αδγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν αδ. δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βγ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν αδ, δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βα ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ οὕτως ἡ βδ πρὸς τὴν βγ, λοιπὴ ἄρα πρὸς λοιπὴν καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν αδ. δγ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν αδ, δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς δβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δγ. πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ αδ πρὸς λοιπὴν τὴν δγ ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βγ. διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν αδ, δγ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ δγ πρὸς τὴν γβ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν αδ, δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ τετραγώνῳ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δγ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, ἀνάπαλιν καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν αδ, δγ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν αβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν αδ, δγ ὑπεροχῆς καὶ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ τετραγώνῳ.

Ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ τετραγώνῳ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ δε· τὸ ἄρα ὑπὸ εαγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γδε, ἴσον τῷ ἀπὸ αδ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ, διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εα, βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ γδε, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αε. βγ τῷ ὑπὸ γδε· ἀνάλογον[2] καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε, τουτέστι πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δβ πρὸς τὴν βγ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αβ πρὸς λοιπὴν τὴν βδ ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ τετραγώνῳ.

---

1) Einschaltung von *Commandin*.

2) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben ἀνάπαλιν.

2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\beta$, so ist 2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$ = Quadrat über $\gamma\delta$ + 2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$.

Nimmt man Quadrat über $\alpha\gamma$ hinzu, so ergiebt sich

2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\beta$ + Quadrat über $\alpha\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$;

nimmt man ferner Quadrat über $\beta\gamma$ hinzu, so ist

Quadrat über $\alpha\beta$ = Quadrat über $\alpha\delta$ + Quadrat über $\gamma\beta$.

Ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Quadrat über [Command. CLI.] $\beta\delta$, so finden die folgenden drei Gleichheiten statt: Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$, Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\gamma$ = Quadrat über $\delta\gamma$, Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\alpha$ = Quadrat über $\alpha\delta$.



Da $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \beta\gamma$, so ist durch Differenz $\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma = \alpha\delta : \delta\beta$, mithin Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$. Da ferner $\alpha\delta : \delta\gamma = \delta\beta : \beta\gamma$, so ist $\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma = \delta\gamma : \gamma\beta$, mithin Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\gamma$ = Quadrat über $\delta\gamma$. Da endlich $\alpha\delta : \delta\gamma = \alpha\beta : \beta\delta$, so ist $\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\alpha = \delta\alpha : \alpha\beta$, mithin Rechteck $(\alpha\delta - \delta\gamma)\,\beta\alpha$ = Quadrat über $\alpha\delta$.

Es sei $\alpha\beta : \beta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: [Command. CLII.] Quadrat über $\delta\gamma$, so ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$.



Ist $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, so ist Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$ + Quadrat über $\gamma\delta$ (d. h. Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$) = Quadrat über $\alpha\delta$. Da nun

$\alpha\beta : \beta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\gamma$,

so ist durch Differenz

$\alpha\gamma : \gamma\beta$ (d. h. Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \gamma\beta$) = Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$,

folglich Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \beta\gamma$ = Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$,

daher $\alpha\delta : \delta\varepsilon$ (d. h. $\delta\gamma$) = $\delta\beta : \delta\gamma$,

und $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \beta\gamma$,

mithin Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Quadrat über $\beta\delta$.

Ἔστω δὲ πάλιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτω τὸ ἀπὸ αδ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ δγ τετράγωνον· ὅτι τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ τετραγώνῳ. Κείσθω γὰρ ὁμοίως τῇ γδ ἴση ἡ δε· τὸ ἄρα ὑπὸ γαε μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ εδγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αδ. καὶ γίνεται κατὰ διαίρεσιν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, τουτέστιν ὡς [τὸ ὑπὸ εαγ πρὸς τὸ ὑπὸ εα, γβ οὕτως][1]*) τὸ ὑπὸ γαε πρὸς τὸ ὑπὸ εδγ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αε, γβ τῷ ὑπὸ εδγ. ἀνάλογον*[2]*) καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δε, τουτέστι πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δβ πρὸς τὴν βγ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ αβ πρὸς ὅλην τὴν βδ ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βγ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ τετραγώνῳ.*

Κύκλου τοῦ αβγ ἐφαπτέσθωσαν[3]*) αἱ αδ, δγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ δβ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ βζ πρὸς τὴν ζε. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, τὸ ἄρα ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δα ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αζγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βζε, τὸ δὲ ἀπὸ δα ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδε· τὸ ἄρα ὑπὸ βζε μετὰ τοῦ ἀπὸ δζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδε. ἐὰν δὲ ᾖ τοῦτο, γίνεται ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε οὕτως ἡ βζ πρὸς τὴν ζε.*

Τμήματος δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς αβ, κλάσαι εὐθεῖαν τὴν αγβ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. Γεγονέτω, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ γ ἐφαπτομένη ἡ γδ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς δβ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ αγ πρὸς [τὸ ἀπὸ γβ δοθεῖς, ὥστε καὶ ὁ τῆς αδ πρὸς][4]*) τὴν βδ. δοθὲν καί ἐστι δύο. δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ δ, ὥστε καὶ τὸ βδ. ὅθεν συντεθήσεται δὴ τὸ*

---

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben *ἀνάπαλιν.*

[3]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. haben *ἐφάπτονται.*

[4]) Einschaltung von *Commandin.*

Es sei wiederum $\alpha\beta : \beta\gamma =$ Quadrat [*Command. CLIII.*] über $\alpha\delta$: Quadrat über $\delta\gamma$, so ist Rechteck $\alpha\beta \, . \, \beta\gamma =$ Quadrat über $\beta\delta$



Ist wie vorher $\delta\varepsilon = \gamma\delta$, so hat man Rechteck $\gamma\alpha \, . \, \alpha\varepsilon +$ Quadrat über $\gamma\delta$ (d. h. Rechteck $\varepsilon\delta \, . \, \delta\gamma$) $=$ Quadrat über $\alpha\delta$.

Ferner ist $\alpha\gamma : \gamma\beta$ (d. h. Rechteck $\varepsilon\alpha \, . \, \alpha\gamma$: Rechteck $\varepsilon\alpha \, . \, \gamma\beta$) $=$ Rechteck $\gamma\alpha \, . \, \alpha\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\delta \, . \, \delta\gamma$,

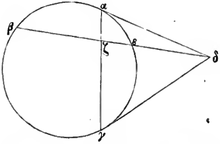
mithin Rechteck $\alpha\varepsilon \, . \, \gamma\beta =$ Rechteck $\varepsilon\delta \, . \, \delta\gamma$.

Daher $\alpha\delta : \delta\varepsilon$ (d. h. $\delta\gamma$) $= \delta\beta : \beta\gamma$,

und $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \beta\gamma$,

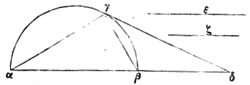
folglich Rechteck $\alpha\beta \, . \, \beta\gamma =$ Quadrat über $\beta\delta$.

Sind $\alpha\delta$, $\delta\gamma$ Tangenten des Kreises [*Command. CLIV.*] $\alpha\beta\gamma$, wird ferner $\alpha\gamma$ gezogen und die beliebige $\delta\beta$ hindurchgelegt, so ist $\beta\delta : \delta\varepsilon = \beta\zeta : \zeta\varepsilon$.



Da $\alpha\delta = \delta\gamma$, so ist Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma +$ Quadrat über $\zeta\delta =$ Quadrat über $\delta\alpha$. Aber Rechteck $\alpha\zeta \, . \, \zeta\gamma =$ Rechteck $\beta\zeta \, . \, \zeta\varepsilon$, und Quadrat über $\delta\alpha =$ Rechteck $\beta\delta \, . \, \delta\varepsilon$, mithin Rechteck $\beta\zeta . \zeta\varepsilon +$ Quadrat über $\zeta\delta =$ Rechteck $\beta\delta \, . \, \delta\varepsilon$. Wenn aber dies statt findet, so ist $\beta\delta : \delta\varepsilon = \beta\zeta : \zeta\varepsilon$.

Ueber $\alpha\beta$ ist ein Kreisabschnitt gegeben, [*Command CLV.*] es soll die gebrochene Linie $\alpha\gamma\beta$ nach einem gegebenen Verhältniss hineingelegt werden.



Es sei geschehen. Man ziehe von γ aus die Tangente $\gamma\delta$, so ist Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\beta\gamma = \alpha\delta : \delta\beta$. Es ist aber das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\beta\gamma$ gegeben, daher ist auch das Verhältniss $\alpha\delta : \delta\beta$ gegeben. Nun

πρόβλημα οὕτως. ἔστω τὸ μὲν τμῆμα τὸ αβγ, ὁ δὲ λόγος ὁ τῆς ε πρὸς τὴν ζ. καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ε πρὸς τὸ ἀπὸ ζ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ δγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γβ· λέγω ὅτι αἱ αγ, γβ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ε πρὸς τὸ ἀπὸ ζ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ, ὡς δὲ ἡ αδ πρὸς τὴν δβ οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, διὰ τὸ ἐφάπτεσθαι τὴν γδ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ε πρὸς τὸ ἀπὸ ζ οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ε πρὸς τὴν ζ οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν γβ· ἡ αγβ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Κύκλος οὗ διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἀπὸ τυχόντος ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ δε, [καὶ] διήχθω ἡ δζ, [καὶ] ἐπεζεύχθω ἡ εζ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ καθ᾽ ὃ συμπίπτει τῇ διαμέτρῳ ἔστω τὸ η· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς τὴν ηβ οὕτως ἡ αθ πρὸς τὴν θβ. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, αε, αζ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ διαμέτρου κάθετος ἡ δε, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δαβ τῇ [ὑπὸ βαε· ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ δαβ τῇ][1]) ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θζβ, ἡ δὲ ὑπὸ βαε ἴση ἐστὶ τῇ ἐκτὸς τετραπλεύρου τῇ ὑπὸ βζη, καὶ ἡ ὑπὸ θζβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βζη. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αζβ γωνία· διὰ δὴ τὸ λῆμμα γίνεται ὡς ἡ αη πρὸς τὴν ηβ οὕτως ἡ αθ πρὸς τὴν βθ.

Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς αβ, καὶ ἀπὸ τῶν α, β σημείων τῇ αγβ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαὶ ἤχθωσαν αἱ βδ, αε, καὶ ἤχθω τυχοῦσα ἡ δε, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τῇ δε πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζη συμπίπτει τῇ αβ κατὰ τὸ η· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αε, βδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αηβ.

---

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

sind die beiden Punkte (α, β) gegeben, mithin auch der Punkt δ, daher auch $\beta\delta$. Deshalb lautet die Synthesis der Aufgabe so: Der Kreisabschnitt sei $\alpha\gamma\beta$ und das gegebene Verhältniss $\varepsilon : \zeta$. Man mache Quadrat über ε : Quadrat über $\zeta = \alpha\delta : \delta\beta$, ziehe die Tangente $\delta\gamma$ und die Geraden $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, so werden diese Linien $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ der Aufgabe genügen. Da nämlich

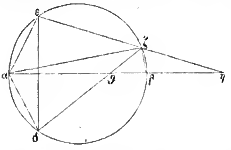
Quadrat über ε : Quadrat über $\zeta = \alpha\delta : \delta\beta$,

aber $\alpha\delta : \delta\beta =$ Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\beta$, weil $\gamma\delta$ eine Tangente des Kreises ist, mithin

Quadrat über ε : Quadrat über $\zeta =$ Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\gamma\beta$,

so ist $\varepsilon : \zeta = \alpha\gamma : \gamma\beta$, mithin genügt die gebrochene Linie $\alpha\gamma\beta$ der Aufgabe.

Ist $\alpha\beta$ der Durchmesser eines Kreises [*Command. CLVI.*] und $\delta\varepsilon$ eine Senkrechte darauf von einem beliebigen Punkte; zieht man ferner $\delta\zeta$, verbindet $\varepsilon\zeta$ und verlängert sie bis sie den Durchmesser im Punkte η schneidet, so ist $\alpha\eta : \eta\beta = \alpha\vartheta : \vartheta\beta$.



Man ziehe die Linien $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$. Da nun $\delta\varepsilon$ eine Senkrechte auf dem Durchmesser ist, so ist $\angle\, \delta\alpha\beta = \angle\, \beta\alpha\varepsilon$; aber $\angle\delta\alpha\beta = \angle\vartheta\zeta\beta$ als Winkel auf demselben Bogen, und $\angle\beta\alpha\varepsilon = \angle\beta\zeta\eta$ als Aussenwinkel des Vierecks, mithin $\angle\vartheta\zeta\beta = \angle\beta\zeta\eta$. Nun ist $\angle\alpha\zeta\beta = R$, mithin nach einem Lemma $\alpha\eta : \eta\beta = \alpha\vartheta : \vartheta\beta$.

In dem Halbkreis über $\alpha\beta$ sind [*Command. CLVII.*] von den Punkten α, β die Geraden $\beta\delta$, $\alpha\varepsilon$ auf $\alpha\gamma\beta$ senkrecht gezogen; zieht man ferner die beliebige Gerade $\delta\varepsilon$ und auf $\delta\varepsilon$ im Punkte ζ die Senkrechte $\zeta\eta$, welche $\alpha\beta$ im Punkte η schneidet, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \beta\delta =$ Rechteck $\alpha\eta \cdot \eta\beta$.

Ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ ηβ πρὸς τὴν βδ, περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραι· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν αηε γωνία τῇ ὑπὸ τῶν βδη γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ αηε ἴση ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ αζε, ἡ δὲ ὑπὸ βδη πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ βζη· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αζε γωνία τῇ ὑπὸ βζη γωνίᾳ. ἔστι δέ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αζβ, εζη γωνιῶν.

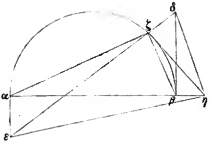
Τρίγωνον τὸ αβγ ἴσην ἔχον τὴν αβ τῇ αγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ ἐπὶ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω ἡδε ποιοῦσα ἴσον τὸ βδε τρίγωνον τῷ αβγ τριγώνῳ· ὅτι ἐὰν δίχα τμηθῇ μία τῶν ἴσων πλευρῶν ἡ πρὸς τῷ ἴσῳ τριγώνῳ τῇ βζ[1]), γίνεται ὡς συναμφότερος ἡ ζβ, βη πρὸς τὴν ζη οὕτω τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ζθ τετράγωνον. Ἤχθω διὰ τοῦ β τῇ δε παράλληλος ἡ βκ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ κ. ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ζκ, κθ πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ζκ, κθ καὶ τῆς ζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζθ, οὕτω τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον [πρὸς τὸ ἀπὸ ζθ τετράγωνον][2]) τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ζκ, κθ καὶ τῆς ζθ, τουτέστιν ἡ τῶν ἀπὸ ζκ, κθ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῷ ἀπὸ αζ. ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ κζ, ζα ὑπεροχή ἐστι τὸ ἀπὸ κθ. ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ κζ, ζα ὑπεροχή ἐστι τὸ ὑπὸ γκα· ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ γκα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θκ. ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γκ πρὸς τὴν κθ, τουτέστιν ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ κθ πρὸς τήν κα, τουτέστιν ἡ δβ πρὸς τὴν βα. ἔστι δέ· παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ αε τῇ δγ, ἐπειδὴ τὸ δβε τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ τριγώνῳ· κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ αβε, λοιπὸν τὸ δαε λοιπῷ τῷ αγε ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως.

Κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ,

---

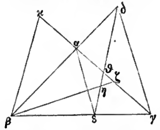
[1]) Der Text scheint an dieser Stelle corrumpirt; eine andere Lesart ist: ἐὰν — μιᾷ — ἡ —

[2]) Einschaltung von *Commandin*.



Findet dies statt, so ist $\alpha\varepsilon : \alpha\eta = \eta\beta : \beta\delta$; es sind dies aber gleiche Winkel einschliessende Seiten, es wird also $\angle\, \alpha\eta\varepsilon = \angle\, \beta\delta\eta$ sein. Nun ist $\angle\, \alpha\eta\varepsilon = \angle\, \alpha\zeta\varepsilon$ als Winkel auf demselben Bogen, $\angle\, \beta\delta\eta = \angle\, \beta\zeta\eta$ aus demselben Grunde; demnach wird $\angle\, \alpha\zeta\varepsilon = \angle\, \beta\zeta\eta$ sein. Es ist dies aber der Fall, denn ein jeder der Winkel $\alpha\zeta\beta$, $\varepsilon\zeta\eta$ ist ein rechter.

In dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ sei $\alpha\beta = \alpha\gamma$; [*Command. CLVIII.*] man verlängere $\alpha\beta$ bis δ und ziehe von δ aus $\delta\varepsilon$ so dass $\triangle\, \beta\delta\varepsilon = \triangle\, \alpha\beta\gamma$, so ist, wenn eine der gleichen Seiten, die in dem einen gleichen Dreieck liegt, durch $\beta\zeta$ halbirt wird, $\zeta\beta + \beta\eta : \zeta\eta =$ Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\vartheta$.



Man ziehe durch β zu $\delta\varepsilon$ die Parallele $\beta\varkappa$ und verlängere $\alpha\gamma$ bis $\varkappa$. Findet das Behauptete statt, so ist $\zeta\varkappa + \varkappa\vartheta : \zeta\vartheta$ (d. h. Rechteck $(\zeta\varkappa + \varkappa\vartheta)\,\zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\vartheta$) $=$ Quadrat über $\alpha\zeta$: Quadrat über $\zeta\vartheta$, aber Rechteck $(\zeta\varkappa + \varkappa\vartheta)\,\zeta\vartheta$ (d. h. Quadrat über $\zeta\varkappa$ — Quadrat über $\varkappa\vartheta$) $=$ Quadrat über $\alpha\zeta$, demnach ist Quadrat über $\varkappa\zeta$ — Quadrat über $\alpha\zeta$ = Quadrat über $\varkappa\vartheta$. Nun ist Quadrat über $\varkappa\zeta$ — Quadrat über $\alpha\zeta$ = Rechteck $\gamma\varkappa\,.\,\varkappa\alpha$ demnach Rechteck $\gamma\varkappa\,.\,\varkappa\alpha$ = Quadrat über $\varkappa\vartheta$. Alsdann ist $\gamma\varkappa : \varkappa\vartheta$ (d. h. $\gamma\beta : \beta\varepsilon$) $= \varkappa\vartheta : \varkappa\alpha$ (d. h. $\delta\beta : \beta\alpha$). Dies ist aber der Fall; es ist nämlich $\alpha\varepsilon \parallel \delta\gamma$, da $\triangle\, \delta\beta\varepsilon = \triangle\, \alpha\beta\gamma$ und wenn das gemeinsame $\triangle\, \alpha\beta\varepsilon$ weggenommen wird, $\triangle\, \delta\alpha\varepsilon = \triangle\, \alpha\gamma\varepsilon$, die auf derselben Basis stehen.

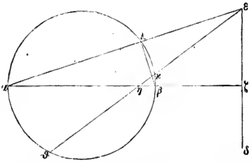
Es sei $\alpha\beta$ der Durchmesser eines Kreises; [*Command. CLIX.*]

καὶ ἔστω ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν δε κάθετος. καὶ τῷ ὑπὸ αζβ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ζη τετράγωνον· ὅτι οἷον ἐὰν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ ε καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευχθεῖσα ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ θ, γίνεται καὶ τὸ ὑπὸ θεκ ἴσον τῷ ἀπὸ εη τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, βλ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ λ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζ ὀρθή· τὸ ἄρα ὑπὸ αελ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αζβ καὶ τῷ ἀπὸ ζε τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ αλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θεκ, τὸ δὲ ὑπὸ αζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζη τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ θεκ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εζ, ζη τετραγώνοις, τουτέστι τῷ ἀπὸ εη τετραγώνῳ.

Ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ. καὶ τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ βεδ ἴσον τῷ ἀπὸ εγ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ βδε τῷ ὑπὸ αδγ, τὸ δὲ ὑπὸ αβγ τῷ ὑπὸ εβδ. Ἐπεὶ γάρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βε πρὸς τὴν εγ [οὕτως] ἡ εγ πρὸς τὴν εδ· τὸ ἄρα ὑπὸ βεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εγ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ δε τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αδγ. πάλιν τὸ ὑπὸ βεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εγ τετραγώνῳ· ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς βε τετραγώνου, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εβδ. Ἀλλὰ ἔστω νῦν τὸ ὑπὸ τῶν βδε ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αδγ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ γα κατὰ τὸ ε· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδγ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ δε τετράγωνον, ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ βεδ ἴσον τῷ ἀπὸ γε τετραγώνῳ· ἀνάλογον καὶ δὶς τὰ ἡγούμενα καὶ διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ.

Τούτων ὄντων, ἔστω κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν αβ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ, ἔστω δὲ ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν δε κάθετος

man verlängere ihn und er stehe auf der beliebig angenommenen Geraden $\delta\varepsilon$ senkrecht, und es sei Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$ = Quadrat über $\zeta\eta$, so ist, wenn von einem beliebig angenommenen Punkt ε nach η eine Linie gezogen und bis ϑ verlängert wird, auch Rechteck $\vartheta\varepsilon \,.\, \varepsilon\varkappa$ = Quadrat über $\varepsilon\eta$.



Man ziehe $\alpha\varepsilon$, $\beta\lambda$, so ist $\angle \lambda = R$; aber auch $\angle \zeta = R$, demnach Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\lambda$ = Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$. Nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\lambda$ = Rechteck $\vartheta\varepsilon \,.\, \varepsilon\varkappa$ und Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\beta$ = Quadrat über $\zeta\eta$, mithin Rechteck $\vartheta\varepsilon \,.\, \varepsilon\varkappa$ = Quadrat über $\zeta\varepsilon$ + Quadrat über $\zeta\eta$ = Quadrat über $\varepsilon\eta$.

Ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$ und wird $\alpha\gamma$ [*Command. CLX.*] im Punkte ε halbirt, so finden die folgenden drei Gleichheiten statt: Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$, Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$, Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\delta$.



Da $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$, so folgt durch Zusammenfassen, Halbiren der Vorderglieder und Differenz $\beta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta$, mithin Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$. Wird das Quadrat über $\delta\varepsilon$ subtrahirt, so ist Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$. Wird endlich beides Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$ von Quadrat über $\beta\varepsilon$ subtrahirt, so kommt Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\delta$.

Ist nun Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$, und halbirt man $\gamma\alpha$ im Punkte ε, so ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$. Da nämlich

Rechteck $\beta\delta \,.\, \delta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$,

so ist, wenn Quadrat über $\delta\varepsilon$ hinzugenommen wird,

Rechteck $\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\varepsilon$.

Hieraus ergiebt sich durch Verdoppelung der Vorderglieder und Differenz $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$.

Nachdem dies nachgewiesen, werde [*Command. CLXI.*] der Durchmesser $\alpha\beta$ des Kreises verlängert, er stehe auf einer be-

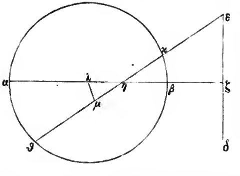
καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζβ οὕτως ἡ αη πρὸς τὴν ηβ· ὅτι πάλιν οἷον ἐὰν ἐπὶ τῆς γδ σημεῖον ληφθῇ ὡς τὸ ε καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ εη [καὶ] ἐκβληθῇ [1]) ἐπὶ τὸ θ, γίνεται ὡς ἡ θε πρὸς τὴν εκ οὕτως ἡ θη πρὸς τὴν ηκ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν εθ κάθετος ἤχθω ἡ λμ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ κμ τῇ μθ. ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν μ, ζ γωνιῶν, ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὰ ε, ζ, λ, μ σημεῖα· τὸ ἄρα ὑπὸ ζηλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εημ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ζηλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αηβ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν αζ πρὸς τὴν ζβ οὕτω τὴν αη πρὸς τὴν ηβ, καὶ τέτμηται ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ λ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εημ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αηβ, τουτέστιν ἐν κύκλῳ γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν θηκ [2])· καὶ τέτμηται δίχα ἡ θκ κατὰ τὸ μ, διὰ [δὴ] τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς ἡ θε πρὸς τὴν εκ οὕτως ἡ θη πρὸς τὴν ηκ.

Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς αβ, καὶ παράλληλος τῇ αβ ἡ γδ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ γε, δη· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ ηβ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, ζδ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ γζ τῇ ζδ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γζ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ζδ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ γζ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν γε, εζ τετράγωνα, τῷ δὲ ἀπὸ δζ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δη, ηζ τετράγωνα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γε, εζ ἄρα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζη, ηδ τετραγώνοις· ὧν τὸ ἀπὸ γε τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δη τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς εζ τετράγωνον λοιπῷ τῷ ἀπὸ ζη τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ ζη. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ αζ ὅλη τῇ ζβ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ αε λοιπῇ τῇ ηβ ἐστὶν ἴση. ὅπερ: —

[1]) Die Hdsch. haben ἐκβεβλήσθω.

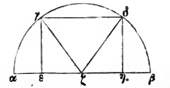
[2]) Vielleicht sind diese Worte so umzustellen: τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν θηκ ἐν κύκλῳ γάρ.

liebigen Geraden $\delta\varepsilon$ senkrecht und es sei $\alpha\zeta:\zeta\beta = \alpha\eta:\eta\beta$, so ist, wenn auf $\gamma\delta$ ein beliebiger Punkt ε angenommen und die Gerade $\varepsilon\eta$ bis ϑ verlängert wird, $\vartheta\varepsilon:\varepsilon\varkappa = \vartheta\eta:\eta\varkappa$.



Man ziehe von dem Mittelpunkt λ des Kreises auf $\varepsilon\vartheta$ die Senkrechte $\lambda\mu$, so ist $\varkappa\mu = \mu\vartheta$. Da ein jeder der Winkel μ, ζ ein rechter ist, so liegen die Punkte ε, ζ, λ, μ auf der Peripherie eines Kreises, mithin Rechteck $\zeta\eta \,.\, \eta\lambda$ $=$ Rechteck $\varepsilon\eta \,.\, \eta\mu$. Aber Rechteck $\zeta\eta \,.\, \eta\lambda =$ Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$, weil $\alpha\zeta:\zeta\beta = \alpha\eta:\eta\beta$ und $\alpha\vartheta$ im Punkte λ halbirt ist; mithin Rechteck $\varepsilon\eta \,.\, \eta\mu =$ Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$ (d. h. Rechteck $\vartheta\eta \,.\, \eta\varkappa$). Nun ist $\vartheta\varkappa$ im Punkte μ halbirt, folglich ist nach dem Vorhergehenden $\vartheta\varepsilon:\varepsilon\varkappa = \vartheta\eta:\eta\varkappa$.

Ist in dem Halbkreis über $\alpha\beta$ die Sehne $\gamma\delta \parallel \alpha\beta$ und sind die Senkrechten $\gamma\varepsilon$, $\delta\eta$ gefällt, so ist $\alpha\varepsilon = \eta\beta$. [*Command. CLXII.*]



Man ziehe vom Mittelpunkt ζ die Linien $\zeta\gamma$, $\zeta\delta$, so ist $\zeta\gamma = \zeta\delta$, mithin auch Quadrat über $\gamma\zeta =$ Quadrat über $\zeta\delta$. Aber Quadrat über $\gamma\zeta =$ Quadrat über $\gamma\varepsilon +$ Quadrat über $\varepsilon\zeta$, und Quadrat über $\delta\zeta =$ Quadrat über $\delta\eta +$ Quadrat über $\eta\zeta$, folglich Quadrat über $\gamma\varepsilon +$ Quadrat über $\varepsilon\zeta =$ Quadrat über $\delta\eta +$ Quadrat über $\eta\zeta$;

nun ist	Quadrat über $\gamma\varepsilon$	$=$	Quadrat über $\delta\eta$,	
mithin	Quadrat über $\varepsilon\zeta$	$=$	Quadrat über $\eta\zeta$	
und	$\varepsilon\zeta$	$=$	$\eta\zeta$.	
Es ist aber	$\alpha\zeta$	$=$	$\zeta\beta$,	
folglich	$\alpha\varepsilon$	$=$	$\eta\beta$,	was zu beweisen war.

Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς αβ, καὶ ἀπὸ τυχόντος τοῦ γ διήχθω ἡ γδ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ δε· ὅτι τὸ ἀπὸ αγ τοῦ ἀπὸ γδ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, γβ καὶ τῆς αε.

Ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ αγ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ δγ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ δε, εγ, καὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς αγ, γβ καὶ τῆς αε· ὅτι ἄρα καὶ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ γαε, λοιπὸν τὸ ὑπὸ αγε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ δε, τουτέστι τῷ ὑπὸ αεβ, καὶ τῷ ἀπὸ γε καὶ τῷ ὑπὸ αε, γβ· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ γε, ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ αεγ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αεβ καὶ τῷ ὑπὸ αε, βγ. ἔστι δέ: —

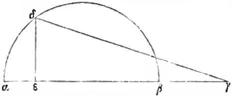
Εἰς τὸ πόρισμα τοῦ ᾱ βιβλίου [1]).

Θέσει ὄντος παραλληλογράμμου τοῦ αδ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ε διαγαγεῖν τὴν εζ καὶ ποιεῖν ἴσον τὸ ζγη τρίγωνον τῷ αδ παραλληλογράμμῳ. Γεγονέτω· ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ζγη τρίγωνον τῷ αδ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ αδ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αδγ τριγώνου, καὶ τὸ ζγη ἄρα τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αγδ τριγώνου. ὡς δὲ τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, διὰ τὸ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν γ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ζγη πρὸς τὸ ὑπὸ αγδ· δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ αγδ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ζγη. καὶ δοθέντος τοῦ ε εἰς θέσει τὰς αγ, γδ διῆκται εἰς χωρίου ἀποτομήν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ εζ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω τὸ μὲν τῇ θέσει παραλληλόγραμμον τὸ αδ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ ε. διήχθω ἀπὸ τοῦ ε εἰς θέσει τὰς ζγ, γδ εὐθεῖα ἡ εζ ἀποτέμνουσα χωρίον τὸ ὑπὸ ζγη ἴσον δοθέντι χωρίῳ τῷ διπλασίονι τοῦ ὑπὸ αγδ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῇ ἀναλύσει δείξομεν ἴσον τὸ ζγη τρίγωνον τῷ αδ παραλληλογράμμῳ. ἡ εζ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. φανερὸν οὖν ὅτι μόνη, ἐπεὶ κἀκείνη μόνη.

[1]) Diese Ueberschrift findet sich in Ms. 2440; dafur hat Ms. 2368: *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν κωνικῶν.* — Es scheint, dass dieser Zusatz, so wie das Folgende bis zu der Ueberschrift: *εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους*, eine spatere Einschaltung ist.

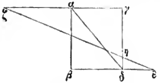
Zieht man durch den Halbkreis [*Command. CLXIII.*] über $\alpha\beta$ von einem beliebigen Punkt γ die Gerade $\gamma\delta$ und lällt die Senkrechte $\delta\varepsilon$, so ist Quadrat über $\alpha\gamma$ — Quadrat über $\gamma\delta =$ Rechteck $(\alpha\gamma + \gamma\beta)\,\alpha\varepsilon$.

Findet dies statt, so ist Quadrat über $\alpha\gamma =$ Quadrat über $\delta\gamma$ (d. h. Quadrat über $\delta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$) + Rechteck $(\alpha\gamma + \gamma\beta)\,\alpha\varepsilon$.



Wird nun Rechteck $\gamma\alpha\ \alpha\varepsilon$ subtrahirt, so kommt Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\varepsilon =$ Quadrat über $\delta\varepsilon$ (d. h. Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta$) + Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \gamma\beta$; subtrahirt man ferner Quadrat über $\gamma\varepsilon$, so bleibt Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma =$ Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\beta +$ Rechteck $\alpha\varepsilon \cdot \gamma\beta$, was richtig ist.

Zu dem Porisma des ersten Buchs. [*Command. CLXIV.*] Durch das Parallelogramm $\alpha\delta$, welches der Lage nach gegeben ist, von einem gegebenen Punkte ε eine Gerade $\varepsilon\zeta$ zu ziehen, so dass das Dreieck $\zeta\gamma\eta$ dem Parallelogramm $\alpha\delta$ gleich ist.



Es sei geschehen. Da $\triangle\,\zeta\gamma\eta = \#\,\alpha\delta$, aber $\#\,\alpha\delta = 2\,\triangle\,\alpha\gamma\delta$, so ist $\triangle\,\zeta\gamma\eta = 2\,\triangle\,\alpha\gamma\delta$. Nun haben diese Dreiecke den Winkel γ gemeinsam, folglich stehen sie in dem Verhältniss von Rechteck $\zeta\gamma \cdot \gamma\eta$: Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$. Aber Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ ist gegeben, folglich auch Rechteck $\zeta\gamma \cdot \gamma\eta$, und von dem gegebenen Punkt ε ist zu den der Lage nach gegebenen Geraden $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ dem Raumschnitt gemäss $\varepsilon\zeta$ gezogen; demnach ist $\varepsilon\zeta$ der Lage nach gegeben.

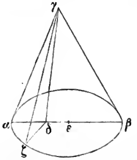
Synthesis. Es sei das Parallelogramm $\alpha\delta$ und der Punkt ε der Lage nach gegeben. Man ziehe von ε zu den der Lage nach gegebenen Geraden $\zeta\gamma$, $\gamma\delta$ die Gerade $\varepsilon\zeta$, welche ein dem Rechteck $\zeta\gamma \cdot \gamma\eta$ gleichen Raum abschneidet, der nämlich dem Doppelten von Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ gleich ist, und wir werden der Analysis gemäss zeigen, dass $\triangle\,\zeta\gamma\eta = \#\,\alpha\delta$. Mithin genügt $\varepsilon\zeta$ der Aufgabe, und zwar ist sie die einzige Linie, die der Aufgabe genügt.

Ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ αβ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον· εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελής ἐστιν ὁ κῶνος, φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸν αβ κύκλον προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· εἰ δὲ σκαληνὸς, ἔστω εὑρεῖν τίς μεγίστη καὶ τίς ἐλαχίστη. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ αβ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος, καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ αβ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ γδ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ α, β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γβ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ βγ, ἐλαχίστη δὲ ἡ αγ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸν αβ προσπιπτουσῶν. προςβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ γζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δζ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῆς δζ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, καὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ δ γωνίαι ὀρθαί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ βγ τῆς γζ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ γζ τῆς γα μείζων ἐστίν· ὥστε μεγίστη μέν ἐστιν ἡ γβ, ἐλαχίστη δὲ ἡ γα.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αβ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ γα· καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ βγ, ἐλαχίστη δὲ ἡ αγ. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ γβ τῆς γα φανερόν. διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ γε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς αε, καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, μείζων ἐστὶν ἡ γβ τῆς γε· ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ εγ τῆς γα. ὥστε μεγίστη μὲν ἡ βγ, ἐλαχίστη δὲ ἡ γα τῶν ἀπὸ τοῦ γ σημείου πρὸς τὸν αβ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

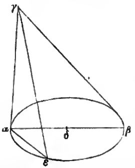
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ γδ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε ἐκβεβλήσθω. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βγ· λέγω δὴ ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ βγ, ἐλαχίστη δὲ ἡ αγ πασῶν

Es habe ein Kegel den Kreis $\alpha\beta$ [*Command. CLXV.*] als Basis und den Punkt γ als Spitze. Ist derselbe ein gleichschenkliger, so sind offenbar alle Geraden, die von γ nach dem Umfang des Kreises gezogen werden, unter sich gleich; ist er aber ein schiefer, so ist zu finden, welche die grösste und welche die kleinste unter diesen Linien ist.



Es falle zuerst die von γ auf die Ebene des Kreises $\alpha\beta$ gefällte Senkrechte innerhalb des Kreises; sie sei $\gamma\delta$. Verbindet man δ mit dem Mittelpunkt des Kreises ε, verlängert $\delta\varepsilon$ nach beiden Seiten hin bis α, β und zieht $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, so wird unter allen Linien, welche von γ nach dem Kreise $\alpha\beta$ gehen, $\beta\gamma$ die grösste, $\alpha\gamma$ die kleinste sei. Zieht man nämlich irgend eine andere $\gamma\zeta$ und verbindet ζ mit δ, so ist $\beta\delta > \delta\zeta$, $\gamma\delta$ gemeinschaftlich, und die Winkel bei δ rechte, folglich $\beta\gamma > \gamma\zeta$. Auf dieselbe Weise wird gezeigt, dass auch $\gamma\zeta > \gamma\alpha$; daher ist $\gamma\beta$ unter allen die grösste, $\gamma\alpha$ die kleinste.

Es falle ferner die von γ gefällte [*Command. CLXVI.*] Senkrechte $\gamma\alpha$ auf die Peripherie des Kreises $\alpha\beta$; man ziehe $\alpha\delta$ und verlängere sie bis β und verbinde γ mit β, so soll $\beta\gamma$ die grösste, $\alpha\gamma$ die kleinste Linie sein. Offenbar ist $\gamma\beta > \gamma\alpha$. Man ziehe irgend eine andere $\gamma\varepsilon$ und verbinde α mit ε. Da nun $\alpha\beta$ ein Durchmesser ist, also $\alpha\beta > \alpha\varepsilon$ und da $\gamma\alpha$ auf $\alpha\beta$ und $\alpha\varepsilon$ senkrecht steht, so ist $\gamma\beta > \gamma\varepsilon$, und auf ähnliche Weise grösser als alle andern. Auf dieselbe Weise wird auch dargethan, dass $\gamma\varepsilon > \gamma\alpha$; demnach ist $\gamma\beta$ die grösste, $\gamma\alpha$ die kleinste unter allen Geraden, welche von γ nach dem Kreise $\alpha\beta$ gezogen werden.



Es falle endlich die Senkrechte $\gamma\delta$ [*Command. CLXVII.*] ausserhalb des Kreises. Man verbinde δ mit dem Mittelpunkt des Kreises ε und verlängere sie und ziehe $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, so soll $\gamma\beta$ die grösste, $\gamma\alpha$ die kleinste unter allen Linien sein, die von γ nach

τῶν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸν αβ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ἡ βγ τῆς γα φανερόν· λέγω δή ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὴν τοῦ αβ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν. προσπιπτέτω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ γζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δζ. ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ βδ, μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ· καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ δγ. ἐπεὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ βγ τῆς γζ· ὁμοίως καὶ πασῶν. μεγίστη μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ γβ. ὅτι δὲ καὶ ἡ αγ ἐλαχίστη. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων [1]) ἐστὶν ἡ αδ τῆς δζ, καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ δγ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῆς γζ· ὁμοίως καὶ πασῶν. ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, μεγίστη δὲ ἡ βγ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὴν τοῦ αβ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους.

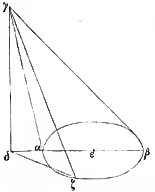
Ἐὰν [2]) *ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν· εἰκότως ὁ Ἀπολλώνιος προστίθησι· ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ* [3]), *ἐπειδήπερ τοῦ τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, περισσὸν ἦν προσεκβάλλειν, διὰ τὴν φερομένην εὐθεῖαν ἀεί ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδήπερ πάντοτε τὸ σημεῖον ἴσον ἀφέξειν ἔμελλεν τῆς*

---

[1]) Die Hdsch. haben *ἐλαχίστη*; Halley emendirt *ἐλάσσων*.

[2]) Die folgende Bemerkung bezieht sich auf die erste Definition des ersten Buchs von Apoll. Conic. Diese Definition lautet vollstandig: *Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὅς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν.*

[3]) Die Hdsch. haben *καὶ ἐφ' ἑκάτερα ἐκβληθῇ*. Halley hat das Obige restituirt.



dem Kreise $\alpha\beta$ gezogen werden. Offenbar ist $\gamma\beta > \gamma\alpha$; aber sie ist auch grösser als alle Geraden, die von γ nach der Peripherie des Kreises $\alpha\beta$ gehen. Man ziehe irgend eine andere $\gamma\zeta$ und verbinde δ mit ζ. Da $\beta\delta$ durch den Mittelpunkt geht, so ist sie grösser als $\delta\zeta$; es ist aber $\delta\gamma$ senkrecht auf $\delta\beta$, $\delta\zeta$, weil sie in derselben Ebene liegen; daher $\gamma\beta > \gamma\zeta$, und auf ähnliche Weise grösser als alle andern. Mithin ist $\gamma\beta$ die grösste. Es soll aber $\gamma\alpha$ die kleinste sein; da nämlich $\alpha\delta < \delta\zeta$ und $\gamma\delta$ auf ihnen senkrecht steht, so ist $\gamma\alpha < \gamma\zeta$, und auf ähnliche Weise kleiner als alle andern. Mithin ist $\gamma\alpha$ die kleinste und $\gamma\beta$ die grösste unter allen Geraden, welche von γ nach dem Umfange des Kreises $\alpha\beta$ gezogen werden.

Zu den die Kegel betreffenden Definitionen.

Den Worten: „Wenn (eine Gerade) von irgend einem Punkte nach der Peripherie eines Kreises“ fügt Apollonius passend hinzu „nach beiden Seiten verlängert wird,“ da er von der Entstehung eines beliebigen Kegels handelt. Wenn nämlich der Kegel ein gleichschenkliger ist, so ist die Verlängerung nicht nöthig, weil die Gerade, die bewegt wird, den Umfang des Kreises fortwährend

τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κῶνος, ἔστι δέ, ὡς προγέγραπται, ἐν κώνῳ σκαληνῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρά, ἀναγκαίως προστίθησι τὸ προσεκβληθῇ [1]), ἵνα προσεκβληθεῖσα ἡ ἐλαχίστη ἀεὶ τῆς μεγίστης αὔξηται προσεκβαλλομένης, ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ καὶ ψαύσῃ κατ' ἐκεῖνο τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἔστω γραμμὴ ἡ αβγ, καὶ θέσει ἡ αγ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν αγ κάθετοι ἀγόμεναι οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἀφ' ἑκάστης αὐτῶν τμηθέντων [2])· λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστιν ἡ αβγ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστιν ἡ αγ. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν δ, β, ε κάθετον αἱ δζ, βη, εθ. τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ δζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αζγ, τὸ δὲ ἀπὸ βη τῷ ὑπὸ αηγ, τὸ δὲ ἀπὸ εθ τῷ ὑπὸ αθγ. τετμήσθω δὴ δίχα ἡ αγ κατὰ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κδ, κβ, κε. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ αζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζκ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ακ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ αζγ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ δζ, τὸ ἄρα ἀπὸ δζ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ δκ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ακ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ακ τῇ κδ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν βκ, εκ ἴση ἐστὶ τῇ ακ ἢ τῇ κγ· κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστιν ἡ αβγ τοῦ [3]) περὶ κέντρον τὸ κ, τουτέστι τοῦ περὶ διάμετρον τὴν αγ.

Τρεῖς παράλληλοι αἱ αβ, γδ, εζ, καὶ διήχθωσαν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ αηζγ, βηεδ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ αβ, εζ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ οὕτω τὸ ὑπὸ αηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ τετράγωνον. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν ζε, τουτέστιν ὡς τὸ

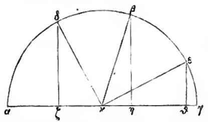
[1]) Die Hdsch. haben προσεκβεβλήσθω.

[2]) Die Hdsch. haben ὑφ' ἑκάστης ἀπὸ τῶν τμηθέντων; das Obige ist von Halley emendirt.

[3]) So emendirt Halley; die Hdsch. haben τῆς.

trifft, indem der feste Punkt immer in gleicher Entfernung von dem Umfang des Kreises bleibt. Da aber auch der Kegel ein schieler sein kann, in welchem, wie gezeigt ist, eine grösste und eine kleinste Seite vorkommt, so war dieser Zusatz nothwendig, damit die kleinste Linie immer so weit verlängert wird, bis sie der grössten gleich wird und demnach den Umfang des Kreises trifft.

Es sei eine Linie $\alpha\beta\gamma$ und eine [*Command. CLXVIII.*] der Lage nach gegebene Gerade $\alpha\gamma$; alle Linien, welche von jener Linie auf $\alpha\gamma$ senkrecht gefällt werden, seien von der Beschaffenheit, dass das Quadrat einer jeden derselben dem Rechteck aus den Abschnitten, in welche die Basis durch jene Senkrechten getheilt wird, gleich ist; so ist $\alpha\beta\gamma$ die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser $\alpha\gamma$ ist.



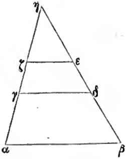
Fällt man von den Punkten δ, β, ε die Senkrechten $\delta\zeta$, $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$, so ist Quadrat über $\delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\gamma$, Quadrat über $\beta\eta$ = Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\gamma$, Quadrat über $\varepsilon\vartheta$ = Rechteck $\alpha\vartheta \,.\, \vartheta\gamma$. Man halbire $\alpha\gamma$ in $\varkappa$ und ziehe $\varkappa\delta$, $\varkappa\beta$, $\varkappa\varepsilon$. Da nun Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\gamma$ + Quadrat über $\zeta\varkappa$ = Quadrat über $\alpha\varkappa$, und Rechteck $\alpha\zeta \,.\, \zeta\gamma$ = Quadrat über $\delta\zeta$, so ist Quadrat über $\delta\zeta$ + Quadrat über $\zeta\varkappa$ (d. h. = Quadrat über $\delta\varkappa$) = Quadrat über $\alpha\varkappa$, folglich $\alpha\varkappa = \varkappa\delta$. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass eine jede der Geraden $\beta\varkappa$, $\varepsilon\varkappa$ der $\alpha\varkappa$ oder $\varkappa\gamma$ gleich ist; folglich ist $\alpha\beta\gamma$ die Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt $\varkappa$, d. h. der über dem Durchmesser $\alpha\gamma$ beschrieben ist.

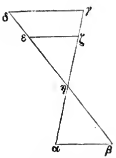
Wenn drei Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ [*Command. CLXIX.*] von zwei Geraden $\alpha\eta\zeta\gamma$, $\beta\eta\varepsilon\delta$ durchschnitten werden, so ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \varepsilon\zeta$: Quadrat über $\gamma\delta$ = Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\zeta$: Quadrat über $\eta\gamma$.

ὑπὸ αβ, ζε πρὸς τὸ ἀπὸ ζε, οὕτως ἡ αη πρὸς τὴν ηζ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ αηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ηζ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αβ, ζε πρὸς τὸ ἀπὸ ζε οὕτω τὸ ὑπὸ αηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ηζ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ζε πρὸς τὸ ἀπὸ γδ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζη πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ αβ, ζε πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τετράγωνον οὕτω τὸ ὑπὸ αηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ηγ τετράγωνον.

Ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον· ὅτι γίνονται τὸ μὲν ὑπὸ βεδ ἴσον τῷ ἀπὸ εγ, τὸ δὲ ὑπὸ αδγ τῷ ὑπὸ βδε, τὸ δὲ ὑπὸ αβγ τῷ ὑπὸ εβδ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν γδ· συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ὡς ἡ βε πρὸς τὴν εγ οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν εδ· τὸ ἄρα ὑπὸ βεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ γε τετραγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ εδ τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αδγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδε. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ βεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εγ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς βε τετραγώνου, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εβδ. γίνεται ἄρα τὰ τρία.

Τὸ α πρὸς τὸ β τὸν συνημμένον λόγον ἐχέτω ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ ε πρὸς τὸ ζ· ὅτι καὶ τὸ γ πρὸς τὸ δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ α πρὸς τὸ β καὶ τὸ ζ πρὸς τὸ ε. Τῷ γὰρ τοῦ ε πρὸς τὸ ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ δ πρὸς τὸ η. ἐπεὶ οὖν τὸ α πρὸς τὸ β συνῆπται ἔκ τε τοῦ τοῦ γ πρὸς δ καὶ τοῦ τοῦ ε πρὸς τὸ ζ, τουτέστι τοῦ δ πρὸς τὸ η· ἀλλὰ ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ γ πρὸς τὸ δ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ δ πρὸς τὸ η ἐστὶν· ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β οὕτω τὸ γ πρὸς τὸ η. ἐπεὶ δὲ τὸ γ πρὸς τὸ δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ γ πρὸς τὸ η καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ η πρὸς τὸ δ,





Da nämlich $\alpha\beta : \zeta\varepsilon$ (d. h. Rechteck $\alpha\beta . \zeta\varepsilon$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$) $= \alpha\eta : \eta\zeta$ (d. h. Rechteck $\alpha\eta . \eta\zeta$: Quadrat über $\eta\zeta$), so ist auch Rechteck $\alpha\beta . \zeta\varepsilon$: Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\eta . \eta\zeta$: Quadrat über $\eta\zeta$; aber Quadrat über $\zeta\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\zeta\eta$: Quadrat über $\eta\gamma$, folglich Rechteck $\alpha\beta . \zeta\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\delta$ = Rechteck $\alpha\eta . \eta\zeta$: Quadrat über $\eta\gamma$.

Wenn $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$ und $\alpha\gamma$ im Punkte ε halbirt wird, so ist Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$, Rechteck $\alpha\delta . \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$, Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\beta . \beta\delta$. [*Command. CLXX.*]

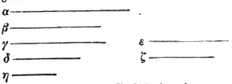


Da $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$, so ist

$$\alpha\beta + \beta\gamma : \beta\gamma = \alpha\delta + \delta\gamma : \delta\gamma,$$
$$\varepsilon\beta : \beta\gamma = \gamma\varepsilon : \delta\gamma,$$
$$\varepsilon\beta : \varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta,$$

folglich Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\varepsilon$. Subtrahirt man das Quadrat über $\varepsilon\delta$, so ist Rechteck $\alpha\delta . \delta\gamma$ = Rechteck $\beta\delta . \delta\varepsilon$. Wird ferner Rechteck $\beta\varepsilon . \varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$ von dem Quadrat über $\beta\varepsilon$ subtrahirt, so ist Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\beta . \beta\delta$. Es findet demnach die dreifache Behauptung statt.

Wenn das Verhältniss $\alpha : \beta$ aus den Verhältnissen $\gamma : \delta$ und $\varepsilon : \zeta$ zusammengesetzt ist, so ist auch das Verhältniss $\gamma : \delta$ aus den Verhältnissen $\alpha : \beta$ und $\zeta : \varepsilon$ zusammengesetzt. [*Command. CLXXI.*]



Man mache $\varepsilon : \zeta = \delta : \eta$. Da nun $\alpha : \beta$ aus $\gamma : \delta$ und $\varepsilon : \zeta$ (d. h. $\delta : \eta$) zusammengesetzt ist, das aus $\gamma : \delta$ und $\delta : \eta$ zusammengesetzte Verhältniss aber $= \gamma : \eta$, so ist $\alpha : \beta = \gamma : \eta$. Da ferner $\gamma : \delta$ aus $\gamma : \eta$ und $\eta : \delta$ zusammengesetzt ist, und $\gamma : \eta$

ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ γ πρὸς τὸ η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ α πρὸς τὸ β, ὁ δὲ τοῦ η πρὸς τὸ δ ἐκ τοῦ ἀνάπαλιν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ζ πρὸς τὸ ε· καὶ τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὅν ἔχει τὸ α πρὸς τὸ β καὶ ἐξ οὗ ὅν ἔχει τὸ ζ πρὸς τὸ ε.

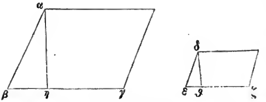
Ἔστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ αγ, δζ ἰσογώνια. ἴσην ἔχοντα τὴν β γωνίαν τῇ ε γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ δεζ οὕτω τὸ αγ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ δζ παραλληλόγραμμον. Εἰ μὲν οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ β, ε γωνίαι, φανερόν· εἰ δὲ μή, ἤχθωσαν κάθετοι αἱ αη, δθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν β γωνία τῇ ε, ἡ δὲ η ὀρθὴ τῇ θ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβη τρίγωνον τῷ δεθ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δθ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ βα πρὸς τὴν αη οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ αη, βγ· ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς τὴν δθ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ δεζ πρὸς τὸ ὑπὸ δθ, εζ. ἔστιν ἄρα ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ δεζ οὕτω τὸ ὑπὸ αη, βγ, τουτέστι τὸ αγ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ὑπὸ δθ, εζ, τουτέστι πρὸς τὸ δζ παραλληλόγραμμον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ βγ τῇ δε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γα ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ζαε· ὅτι ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ δγ, βζ, γίνεται παράλληλος ἡ βζ τῇ δγ. Τοῦτο δέ ἐστι φανερόν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν αε, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ βα πρὸς αδ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αγ οὕτως ἡ βα πρὸς αδ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ δγ, βζ.

Ἔστω τρίγωνον μὲν τὸ αβγ, τραπέζιον δὲ τὸ δεζη, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν τῇ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δε οὕτω τὸ αβγ πρὸς τὸ δεζη. Ἤχθωσαν κάθετοι αἱ αθ, δκ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία τῇ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὀρθὴ θ τῇ κ ὀρθῇ ἴση, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα προς

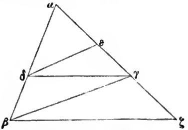
$= \alpha : \beta$, und $\eta : \delta = \zeta : \varepsilon$, so ist $\gamma : \delta$ aus $\alpha : \beta$ und $\zeta : \varepsilon$ zusammengesetzt.

Wenn in den beiden gleichwinkligen Parallelogrammen $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ Winkel $\beta = \varepsilon$, so ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\delta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \# \; \alpha\gamma : \# \; \delta\zeta$. [*Command. CLXXII.*]



Die Behauptung bedarf keines Beweises, wenn Winkel β, ε rechte sind. Ist dies nicht der Fall, so fälle man die Senkrechten $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$; da nun $\angle \beta = \varepsilon$, $\angle \eta = \angle \vartheta = R$, so sind die Dreiecke $\alpha\beta\eta$, $\delta\varepsilon\vartheta$ gleichwinklig, folglich $\beta\alpha : \alpha\eta = \varepsilon\delta : \delta\vartheta$. Aber $\beta\alpha : \alpha\eta =$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\eta \,.\, \beta\gamma$, und $\varepsilon\delta \,.\, \delta\vartheta =$ Rechteck $\delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$: Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \varepsilon\zeta$; folglich Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\zeta =$ Rechteck $\alpha\eta \,.\, \beta\gamma$ (d. h. $\# \; \alpha\gamma$) : Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \varepsilon\zeta$ (d. h. $\# \; \delta\zeta$).

Wenn im Dreieck $\alpha\beta\gamma$ $\beta\gamma \parallel \delta\varepsilon$ und Quadrat über $\gamma\alpha =$ Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$, so ist, wenn $\delta\gamma$, $\beta\zeta$ gezogen werden, $\beta\zeta \parallel \delta\gamma$. [*Command. CLXXIII.*]



Der Beweis ist leicht; denn $\zeta\alpha : \alpha\gamma = \gamma\alpha : \alpha\varepsilon = \beta\alpha : \alpha\delta$, mithin $\zeta\alpha : \alpha\gamma = \beta\alpha : \alpha\delta$, folglich $\beta\zeta \parallel \delta\gamma$.

Wenn in dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und in dem Paralleltrapez $\delta\varepsilon\zeta\eta$ Winkel $\alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta$, so ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $(\delta\eta + \varepsilon\zeta) \,.\, \delta\varepsilon = \Delta\, \alpha\beta\gamma : \delta\varepsilon\zeta\eta$. [*Command. CLXXIV.*]

Man fälle die Senkrechten $\alpha\delta$, $\delta\varkappa$. Da $\angle \alpha\beta\gamma = \angle \delta\varepsilon\zeta$ und $\angle \vartheta = \angle \varkappa = R$, so ist $\beta\alpha : \alpha\vartheta = \varepsilon\delta : \delta\varkappa$; aber $\beta\alpha : \alpha\vartheta =$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$: Rechteck $\alpha\vartheta \,.\, \beta\gamma$, und $\varepsilon\delta : \delta\varkappa =$ Rechteck

αϑ οὕτως ἡ εδ πρὸς δκ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βα πρὸς αϑ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ αϑ, βγ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς τὴν δκ οὕτως ἔστι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δε πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δκ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ὑπὸ αϑ, βγ ἥμισυ τὸ αβγ τρίγωνον, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δκ ἥμισυ τὸ δεζη τραπέζιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δε οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζη τραπέζιον.

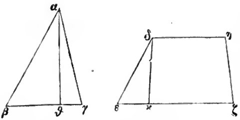
Καὶ ἐὰν ᾖ δὲ τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ δζ· γίνεται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζη παραλληλόγραμμον οὕτω τὸ ὑπὸ αβ, βγ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ δεζ, κατὰ τὰ αὐτά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτῳ, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ αβ, βγ, ἐὰν ᾖ παραλληλόγραμμον τὸ δζ [καὶ ἴσον τῷ αβγ τριγώνῳ][1]*), ἴσον γίνεται τῷ δὶς ὑπὸ δεζ· ἐπὶ δὲ τοῦ τραπεζίου, ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς δη, εζ καὶ τῆς δε. ὅπερ: —*

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς γα διήχϑω τις τυχοῦσα ἡ δε, καὶ αὐτῇ μὲν παράλληλος ἤχϑω ἡ αη, τῇ δὲ βγ ἡ αζ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ἀπὸ αη τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ βηγ οὕτω τὸ ὑπὸ δζϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ζα τετράγωνον. Κείσϑω τῷ μὲν ὑπὸ βηγ ἴσον τὸ ὑπὸ [αηκ, τῷ δὲ ὑπὸ δζϑ ἴσον τὸ ὑπὸ αζλ][2]*) καὶ ἐπεζεύχϑωσαν αἱ βκ, ϑλ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ γ γωνία τῇ ὑπὸ βκη, ἡ δὲ ὑπὸ δαλ ἐν κύκλῳ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζϑλ, καὶ ἡ ὑπὸ ηκβ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζϑλ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ πρὸς τῷ η γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βη πρὸς τὴν ηκ οὕτως ἡ λζ πρὸς τὴν ζϑ. ἐπεὶ δὲ ἐστιν ὡς ἡ αη πρὸς τὴν βη οὕτως ἡ ϑε πρὸς τὴν εβ, ὡς δὲ ἡ ϑε πρὸς εβ οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ζϑ πρὸς ζα, ἐστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ αη πρὸς τὴν ηβ οὕτως ἡ ϑζ πρὸς ζα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ αη πρὸς ηβ οὕτως ἡ ϑζ πρὸς ζα,*

---

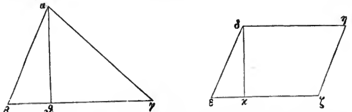
[1]) Einschaltung von *Halley*.

[2]) Einschaltung von *Commandin*.



$(\delta\eta + \varepsilon\zeta)\ \delta\varepsilon$: Rechteck $(\delta\eta+\varepsilon\zeta)\ \delta\varkappa$; nun ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}$ Rechteck $\alpha\vartheta . \beta\gamma$ und $\delta\varepsilon\zeta\eta = \frac{1}{2}$ Rechteck $(\delta\eta+\varepsilon\zeta)\ \delta\varkappa$, folglich Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$: Rechteck $(\delta\eta+\varepsilon\zeta)\ \delta\varepsilon = \Delta\ \alpha\beta\gamma : \delta\varepsilon\zeta\eta$.

Hat man ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und ein Parallelogramm $\delta\zeta$, so ist auf dieselbe Weise $\triangle\ \alpha\beta\gamma : \#\ \delta\zeta =$ Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma$: 2 Rechteck $\delta\varepsilon . \varepsilon\zeta$. Wird vorausgesetzt, dass $\#\ \delta\zeta = \Delta\ \alpha\beta\gamma$, so



ergiebt sich hieraus, dass Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma = 2$ Rechteck $\delta\varepsilon . \varepsilon\zeta$; ist aber $\triangle\ \alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta\eta$, so ist Rechteck $\alpha\beta . \beta\gamma =$ Rechteck $(\delta\eta + \varepsilon\zeta)\ \delta\varepsilon$.

Verlängert man in dem Dreieck [*Command. CLXXV.*] $\alpha\beta\gamma\ \gamma\alpha$ bis δ, zieht die Gerade $\delta\vartheta\varepsilon$, mit ihr $\parallel \alpha\eta$ und $\alpha\zeta \parallel \beta\gamma$, so ist Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma =$ Rechteck $\delta\zeta . \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\alpha$.

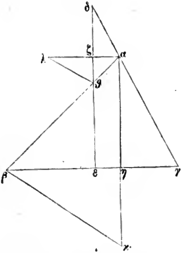
Es sei Rechteck $\alpha\eta . \eta\varkappa =$ Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma$, Rechteck $\alpha\zeta . \zeta\lambda =$ Rechteck $\delta\zeta . \zeta\vartheta$, und es seien $\beta\varkappa$, $\vartheta\lambda$ gezogen. Da nun $\angle\ \gamma = \angle\ \beta\varkappa\eta$, und $\angle\ \delta\alpha\lambda = \angle\ \zeta\vartheta\lambda$, so ist $\angle\ \eta\varkappa\beta = \angle\ \zeta\vartheta\lambda$; es ist aber auch $\angle\ \eta = \angle\ \zeta$, mithin $\beta\eta : \eta\varkappa = \lambda\zeta : \zeta\vartheta$. Da ferner $\alpha\eta : \eta\beta = \vartheta\varepsilon : \varepsilon\beta$ und $\vartheta\varepsilon : \varepsilon\beta = \vartheta\zeta : \zeta\alpha$, so ist $\alpha\eta : \eta\beta = \vartheta\zeta : \zeta\alpha$; aber $\beta\eta : \eta\varkappa = \lambda\zeta : \zeta\vartheta$, folglich $\alpha\eta : \eta\varkappa = \lambda\zeta : \zeta\alpha$. Nun ist $\alpha\eta : \eta\varkappa =$ Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\alpha\eta . \eta\varkappa$ (d. h. Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma$), und $\lambda\zeta . \zeta\alpha =$ Rechteck $\lambda\zeta . \zeta\alpha$

ὡς δὲ ἡ βη πρὸς ηκ οὕτως ἄλλη τις ἡ λζ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ζθ. δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ αη πρὸς τὴν ηκ οὕτως ἡ λζ πρὸς τὴν ζα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αη πρὸς ηκ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ αηκ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ βηγ, ὡς δὲ ἡ λζ πρὸς ζα οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ λζα, τουτέστι τὸ ὑπὸ δζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ ζα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ βηγ οὕτως τὸ ὑπὸ δζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζα.

Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου. ἐπεὶ ὁ μὲν τῆς αη πρὸς ηβ λόγος ἐστὶν ὁ τῆς θε πρὸς εβ, τουτέστιν ὁ τῆς ζθ πρὸς ζα, ὁ δὲ τῆς αη πρὸς τὴν ηγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς δε πρὸς εγ, τουτέστι τῷ τῆς δζ πρὸς ζα, ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ αη πρὸς ηβ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ αη πρὸς ηγ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ βηγ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς θζ πρὸς ζα καὶ τοῦ τῆς δζ πρὸς ζα, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ δζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζα τετράγωνον.

Δύο δοθεισῶν τῶν αβ, βγ, καὶ εὐθείας τῆς δε· εἰς τὰς αβ, βγ ἐναρμόσαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ δε καὶ παράλληλον αὐτῇ. Τοῦτο δὲ φανερόν. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν εγ, διὰ δὲ τοῦ γ τῇ δε παράλληλος ἀχθῇ ἡ γα, ἔσται, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ αγδε, ἡ αγ ἴση τῇ δε καὶ παράλληλος, καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς αβ, βγ.

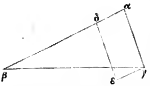
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ δε πρὸς εζ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ βγ τῇ εζ· ὅτι καὶ ἡ αγ τῇ δζ ἐστὶ παράλληλος. Ἐκβεβλήσθω ἡ βγ καὶ συμπιπτέτω ταῖς δε, δζ κατὰ τὰ η, θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ δε πρὸς εζ, καί εἰσιν



(d. h. Rechteck $\delta\zeta . \zeta\vartheta$) : Quadrat über $\zeta\alpha$, folglich Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma$ = Rechteck $\delta\zeta . \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\alpha$.

Durch Zusammensetzung der Verhältnisse ergiebt sich der Beweis auf folgende Weise. Da $\alpha\eta : \eta\beta = \vartheta\varepsilon : \varepsilon\beta = \vartheta\zeta : \zeta\alpha$, und $\alpha\eta : \eta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \delta\zeta : \zeta\alpha$, so ist das zusammengesetzte Verhältniss aus $\alpha\eta : \eta\beta$ und $\alpha\eta : \eta\gamma$, welches das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma$ ist, dem aus $\vartheta\zeta : \zeta\alpha$ und $\delta\zeta : \zeta\alpha$ zusammengesetzten Verhältniss gleich, d. h. dem Verhältniss von Rechteck $\delta\zeta . \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\alpha$.

Die beiden Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und die [*Command. CLXXVI.*] Gerade $\delta\varepsilon$ sind gegeben, es soll zwischen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ eine gerade Linie, die $\delta\varepsilon$ gleich und parallel ist, gelegt werden.



Dies ist leicht auszuführen. Zieht man nämlich durch ε die Gerade $\varepsilon\gamma \parallel \alpha\beta$ und durch γ die Gerade $\gamma\alpha \parallel \delta\varepsilon$, so ist, da $\alpha\gamma\delta\varepsilon$ ein Parallelogramm, $\alpha\gamma$ gleich und parallel $\delta\varepsilon$, folglich $\alpha\gamma$ die verlangte zwischen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ gelegte gerade Linie.

Wenn in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ [*Command. CLXXVII.*] $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, $\alpha\beta \parallel \delta\varepsilon$, $\beta\gamma \parallel \varepsilon\zeta$, so ist auch $\alpha\gamma \parallel \delta\zeta$.

Es schneide die verlängerte $\beta\gamma$ die Verlängerungen von $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$ in den Punkten η, ϑ. Da nun $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$ und $\angle\beta = \angle\varepsilon$, weil $\alpha\beta \parallel \delta\varepsilon$, $\beta\gamma \parallel \varepsilon\zeta$, so ist $\angle\gamma = \angle\zeta$ d. h. =

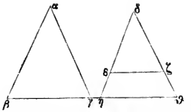
ἴσαι αἱ β, ε γωνίαι, διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ γ τῇ ζ, τουτέστι τῇ θ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς εζ, ηθ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ δζ.

Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αγ, δβ, καὶ μεταξὺ τῶν γ, δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ ε· ὅτι τὸ ὑπὸ αδβ μετὰ τοῦ ὑπὸ γεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αεβ. Τετμήσθω ἡ γδ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ ὡς πρὸς τὸ ε σημεῖον, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αδβ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ζβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ζδ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ γεδ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζε, τῷ δὲ ἀπὸ ζβ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ ζε· τὸ ἄρα ὑπὸ αδβ μετὰ τοῦ ὑπὸ γεδ καὶ τοῦ ἀπὸ ζε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ αεβ καὶ τῷ ἀπὸ ζε. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ζε, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αδβ μετὰ τοῦ ὑπὸ γεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αεβ.

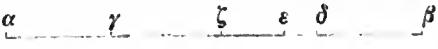
Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αγ, δβ, καὶ μεταξὺ τῶν γ, δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ ε· ὅτι τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ γεδ καὶ τῷ ὑπὸ δαγ. Τετμήσθω γὰρ ἡ γδ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ ὡς πρὸς τὸ ε σημεῖον, κατὰ τὸ ζ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ τῇ ζβ ἴση ἐστίν. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αζ. τὸ δὲ ὑπὸ δαγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αζ, ὥστε τὸ ὑπὸ αεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δαγ καὶ τῷ ἀπὸ γζ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ γεδ καὶ τῷ ἀπὸ εζ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ εζ τετράγωνον, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ δεγ καὶ τῷ ὑπὸ δαγ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν γ τῇ ζ, μείζων δὲ ἡ β τῆς ε· ὅτι ἡ βγ πρὸς γα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς ζδ. Συνεστάτω τῇ ε γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ γβη, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ γ τῇ ζ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς γη οὕτως ἡ εζ πρὸς ζδ· ἀλλὰ ἡ βγ πρὸς τὴν γα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βγ πρὸς γη, καὶ ἡ βγ ἄρα πρὸς γα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς ζδ.

$\angle \vartheta$, weil $\varepsilon\zeta \parallel \eta\vartheta$, folglich $\alpha\gamma \parallel \delta\zeta$.



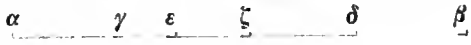
Es sei in der Linie $\alpha\beta$ $\alpha\gamma = \delta\beta$ [*Command. CLXXVIII.*] und zwischen γ und δ werde ein beliebiger Punkt ε angenommen, so ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$.



Man halbire, wie auch der Punkt ε liegen mag, $\gamma\delta$ in ζ. Da nun

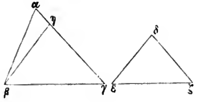
Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Quadrat über $\zeta\delta$ = Quadrat über $\zeta\beta$,
aber Quadrat über $\zeta\delta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$,
und Quadrat über $\zeta\beta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$,
so ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$,
folglich Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ = Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$.

Es sei in der Geraden $\alpha\beta$ $\alpha\gamma = \delta\beta$ [*Command. CLXXIX.*] und zwischen γ und δ werde ein beliebiger Punkt ε angenommen, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Rechteck $\delta\alpha \,.\, \alpha\gamma$.



Man halbire, wie auch der Punkt ε liegen mag, $\gamma\delta$ in ζ; alsdann ist $\alpha\zeta = \zeta\beta$.
Nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Quadrat über $\alpha\zeta$,
und Rechteck $\delta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ = Quadrat über $\alpha\zeta$,
folglich Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Rechteck $\delta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$;
aber Quadrat über $\gamma\zeta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$ + Quadrat über $\varepsilon\zeta$,
daher Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\delta\alpha \,.\, \alpha\gamma$ + Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$.

Wenn in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ [*Command. CLXXX.*] $\angle\gamma = \angle\zeta$, aber $\angle\beta > \varepsilon$, so ist $\beta\gamma : \gamma\alpha < \varepsilon\zeta : \zeta\delta$. Wird $\angle\gamma\beta\eta = \varepsilon$ gemacht und da $\angle\gamma = \angle\zeta$, so ist $\beta\gamma : \gamma\eta = \varepsilon\zeta : \zeta\delta$; aber $\beta\gamma : \gamma\alpha < \beta\gamma : \gamma\eta$, folglich auch $\beta\gamma : \gamma\alpha < \varepsilon\zeta : \zeta\delta$.



Ἐχέτω δὴ πάλιν ἡ βγ πρὸς γα μείζονα λόγον ἤπερ ἡ εζ πρὸς ζδ, ἴση δὲ ἔστω ἡ γ γωνία τῇ ζ· ὅτι πάλιν γίνεται ἐλάσσων ἡ β γωνία τῆς ε γωνίας. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βγ πρὸς γα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς ζδ, ἐὰν ἄρα ποιῶ ὡς τὴν βγ πρὸς τὴν γα οὕτω τὴν εζ πρός τινα, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζδ· ἔστω πρὸς τὴν ζη, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ εη, καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ β γωνία τῇ ὑπὸ ζεη, ἐλάσσονος οὔσης τῆς ε.

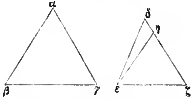
Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, καὶ διήχθωσαν αἱ αη, δθ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ γα οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ· ὅτι γίνεται ὅμοιον καὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ δθζ τριγώνῳ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ γα οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ γα λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ βγ πρὸς γα καὶ τοῦ τῆς γη πρὸς γα, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς εζ πρὸς ζδ καὶ τοῦ τῆς θζ πρὸς ζδ, ὧν ὁ τῆς βγ πρὸς γα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς εζ πρὸς ζδ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ηγ πρὸς γα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θζ πρὸς ζδ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αγη τρίγωνον τῷ δζθ τριγώνῳ.

Διὰ μὲν οὖν τοῦ συνημμένου λόγου, ὡς προγέγραπται. ἔστω δὲ νῦν ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ λόγῳ. Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ βγη ἴσον τὸ ὑπὸ αγκ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γκ οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν γη. τῷ δὲ ὑπὸ εζθ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ δζλ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εζ πρὸς ζλ οὕτως ἡ δζ πρὸς ζθ. ὑπόκειται δὲ ὡς τὸ ὑπὸ βγη, τουτέστι τὸ ὑπὸ αγκ, πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τουτέστιν ὡς ἡ γκ πρὸς γα, οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δζλ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, τουτέστιν ἡ λζ πρὸς δζ· ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς γα οὕτως ἡ εζ πρὸς ζδ, διὰ τὴν ὁμοιότητα [τῶν τριγώνων] [1]) καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γκ οὕτως ἡ εζ πρὸς ζλ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς γκ

[1]) Einschaltung von *Halley*.

[*Command. CLXXXI.*]

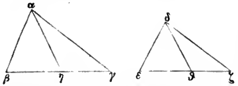
Ist dagegen $\beta\gamma : \gamma\alpha > \varepsilon\zeta : \zeta\delta$ und $\angle \gamma = \angle \zeta$, so ist $\angle \beta < \varepsilon$.



Da $\beta\gamma : \gamma\alpha > \varepsilon\zeta : \zeta\delta$, so wird $\beta\gamma : \gamma\alpha = \varepsilon\zeta$ zu einer Linie, die kleiner ist als $\zeta\delta$; sie sei $\zeta\eta$. Zieht man nun $\varepsilon\eta$, so ist, da proportionale Seiten gleiche Winkel einschliessen, $\angle \beta = \angle \zeta\varepsilon\eta$ und folglich $< \varepsilon$.

[*Command. CLXXXII.*]

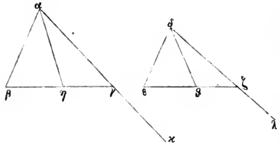
Sind die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ ähnlich und werden $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ so gezogen, dass Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha$ = Rechteck $\varepsilon\zeta \cdot \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$, so ist $\triangle\, \alpha\eta\gamma \backsim \triangle\, \delta\vartheta\zeta$.



Da Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha$ = Rechteck $\varepsilon\zeta \cdot \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$, aber das Verhältniss Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha$ aus den Verhältnissen $\beta\gamma : \gamma\alpha$ und $\gamma\eta : \gamma\alpha$, und das Verhältniss Rechteck $\varepsilon\zeta \cdot \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$ aus den Verhältnissen $\varepsilon\zeta : \zeta\delta$ und $\vartheta\zeta : \zeta\delta$ zusammengesetzt ist, von welchen das Verhältniss $\beta\gamma : \gamma\alpha$ eben dasselbe ist wie $\varepsilon\zeta : \zeta\delta$ wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, so ist auch $\gamma\eta : \gamma\alpha = \vartheta\zeta : \zeta\delta$, und da die von diesen Verhältnissen eingeschlossenen Winkel gleich sind, so ist $\triangle\, \alpha\gamma\eta \backsim \triangle\, \delta\zeta\vartheta$.

[*Command. CLXXXIII.*]

So wird der Satz mit Hülfe der Zusammensetzung der Verhältnisse bewiesen; aber es giebt noch einen andern Beweis, ohne die Zusammensetzung der Verhältnisse in Anspruch zu nehmen.



Es sei Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\eta$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\varkappa$, so ist $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \alpha\gamma : \gamma\eta$; ferner sei Rechteck $\varepsilon\zeta \cdot \zeta\vartheta$.

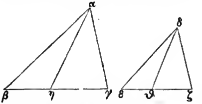
οὕτως ἐδείχθη ἡ αγ πρὸς γη, ὡς δὲ ἡ εζ πρὸς ζλ οὕτως ἡ δζ πρὸς ζθ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γη οὕτως ἡ δζ πρὸς ζθ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αγη τρίγωνον τῷ δζθ τριγώνῳ. ὁμοίως καὶ τὸ αηβ τῷ δθε, ὅτι καὶ τὸ αβγ τῷ δεζ.

Ἔστω ὅμοιον τὸ μὲν αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, τὸ δὲ αηβ τῷ δεθ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ γα οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ α ὅλῃ τῇ δ, ἡ δὲ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ εδθ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηαγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ θδζ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ γ τῇ ζ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ηγ πρὸς τὴν γα οὕτως ἡ θζ πρὸς ζδ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γα οὕτως ἦν ἡ εζ πρὸς ζα· καὶ ὁ συνημμένος ἄρα τῷ συνημμένῳ ἐστὶν ὁ αὐτός· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ γα οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ.

Ἄλλως μὴ διὰ τοῦ συνημμένου. Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ βγη ἴσον τὸ ὑπὸ αγκ, τῷ δὲ ὑπὸ εζδ ἴσον τὸ ὑπὸ δζλ· ἔσται πάλιν ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς γκ οὕτως ἡ αγ πρὸς γη, ὡς δὲ ἡ εζ πρὸς ζλ οὕτως ἡ δζ πρὸς ζθ· καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αγ πρὸς γη οὕτως ἡ δζ πρὸς ζθ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γκ οὕτως ἡ εζ πρὸς ζλ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς γα οὕτως ἡ εζ πρὸς ζδ, διὰ τὴν ὁμοιότητα, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κγ πρὸς γα, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ κγα, ὅ ἐστι τοῦ ὑπὸ βγη, πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, οὕτως ἡ λζ πρὸς ζδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ λζδ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ εζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐὰν ᾖ ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ, καὶ ὅμοιον τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, ὅτι καὶ τὸ αβη τρίγωνον τῷ δεθ τριγώνῳ ὅμοιον.

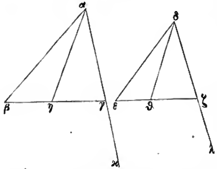
$=$ Rechteck $\delta\zeta . \zeta\lambda$, so ist $\varepsilon\zeta : \zeta\lambda = \delta\zeta : \zeta\vartheta$. Nun war vorausgesetzt, dass Rechteck $\beta\gamma . \gamma\eta$ (d. h. Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varkappa$) : Quadrat über $\alpha\gamma$ (d. h. $\gamma\varkappa : \alpha\gamma$) $=$ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\vartheta$ (d. h. Rechteck $\delta\zeta . \zeta\lambda$) : Quadrat über $\delta\zeta$ (d. h. $\zeta\lambda : \delta\zeta$); aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\beta\gamma : \gamma\alpha = \varepsilon\zeta : \zeta\delta$, mithin $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \varepsilon\zeta : \zeta\lambda$. Dem Obigen zufolge ist $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \alpha\gamma : \gamma\eta$ und $\varepsilon\zeta : \zeta\lambda = \delta\zeta : \zeta\vartheta$, daher $\alpha\gamma : \gamma\eta = \delta\zeta : \zeta\vartheta$, folglich da die von diesen Verhältnissen eingeschlossenen Winkel gleich sind, $\triangle\ \alpha\gamma\eta \backsim \triangle\ \delta\zeta\vartheta$. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass $\triangle\ \alpha\beta\eta \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\vartheta$, weil auch $\triangle\ \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$.

Wenn $\triangle\ \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$ und $\triangle\ \alpha\eta\beta \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\vartheta$, so ist Rechteck $\beta\gamma . \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha =$ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$. [Command. CLXXXIV.[



Da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\angle\ \alpha = \angle\ \delta$, und $\angle\ \beta\alpha\eta = \angle\ \varepsilon\delta\vartheta$, so ist auch $\angle\ \eta\alpha\gamma = \angle\ \vartheta\delta\zeta$; aber es ist auch $\angle\ \gamma = \angle\ \zeta$, folglich $\eta\gamma : \gamma\alpha = \vartheta\zeta : \zeta\delta$. Ferner war $\beta\gamma : \gamma\alpha = \varepsilon\zeta : \zeta\delta$, mithin werden auch die zusammengesetzten Verhältnisse gleich sein, folglich Rechteck $\beta\gamma . \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha =$ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$.

Ein anderer Beweis ohne Zusammensetzung der Verhältnisse. [Command. CLXXXV.]



Es sei Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\varkappa =$ Rechteck $\beta\gamma . \gamma\eta$, und Rechteck $\delta\zeta . \zeta\lambda =$ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\vartheta$, mithin $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \alpha\gamma : \gamma\eta$ und $\varepsilon\zeta : \zeta\lambda = \delta\zeta : \zeta\vartheta$; ferner ist wie oben $\alpha\gamma : \gamma\eta = \delta\zeta : \zeta\vartheta$, folglich $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \varepsilon\zeta : \zeta\lambda$. Aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ist $\beta\gamma : \gamma\alpha = \varepsilon\zeta : \zeta\delta$; daher $\gamma\varkappa : \gamma\alpha$ (d. h. Rechteck $\gamma\varkappa . \gamma\alpha =$ Rechteck $\beta\gamma . \gamma\eta$: Quadrat über $\gamma\alpha$) $= \lambda\zeta : \zeta\delta$ (d. h. Rechteck $\lambda\zeta . \zeta\delta =$ Rechteck $\varepsilon\zeta . \zeta\delta$: Quadrat über $\zeta\delta$). Auf ähnliche Weise wird be-

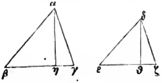
Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ αη, δθ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτω τὸ ὑπὸ εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ. Τοῦτο δὲ φανερὸν, ὅτι ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν β γωνία τῇ ε, ἐλάσσων δὲ ἡ α τῆς δ· ὅτι ἡ γβ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ζε πρὸς εδ. Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἡ α γωνία τῆς δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ εδη· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς βα οὕτως ἡ εη πρὸς εδ. ἀλλὰ καὶ ἡ εη πρὸς εδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ζε πρὸς εδ, καὶ ἡ γβ ἄρα πρὸς τὴν βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ζε πρὸς τὴν εδ. καὶ πάντα δὲ τὰ τοιαῦτα τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ δείξομεν.

Ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτω τὸ ὑπὸ εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ δθ, καὶ ἡ μὲν βη τῇ ηγ ἔστω ἴση, ἡ δὲ γη πρὸς ηα ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θδ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ζθ τῆς θε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ἀπὸ ηα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ζθ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ἀλλὰ τὸ γη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βηγ, τὸ ἄρα ὑπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ζθ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ· ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτως ὑπόκειται τὸ ὑπὸ εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ εθζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ θδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ζθ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζθ τοῦ ὑπὸ εθζ· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ζθ τῆς θε.

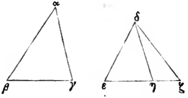
wiesen, dass wenn Rechteck $\beta\gamma \cdot \gamma\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\zeta \cdot \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$, und $\triangle\ \alpha\beta\gamma \sim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$, auch $\triangle\ \alpha\beta\eta \sim \triangle\ \delta\varepsilon\vartheta$.

Wenn in den ähnlichen Dreiecken [*Command. CLXXXVI.*] $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ die Senkrechten $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ gefällt werden, so ist Rechteck $\beta\eta \cdot \eta\gamma$: Quadrat über $\alpha\eta$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\zeta$: Quadrat über $\delta\vartheta$.



Dies ergiebt sich offenbar auf ähnliche Weise wie das Vorhergehende.

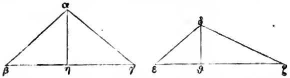
Ist $\angle\ \beta = \angle\ \varepsilon$, aber $\angle\ \alpha < \delta$, so ist $\gamma\beta : \beta\alpha < \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$. [*Command. CLXXXVII.*]



Da $\angle\ \alpha < \delta$, so sei $\angle\ \varepsilon\delta\eta = \angle\ \alpha$; alsdann ist $\gamma\beta : \beta\alpha = \eta\varepsilon : \varepsilon\delta$. Aber $\eta\varepsilon : \varepsilon\delta < \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$, mithin auch $\gamma\beta : \beta\alpha < \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$. Auf dieselbe Weise kann man alles dergleichen beweisen.

Wenn Rechteck $\beta\eta \cdot \eta\gamma$: Quadrat über $\alpha\eta$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$: Quadrat über $\delta\vartheta$, und $\gamma\eta = \beta\eta$, aber $\gamma\eta : \eta\alpha < \zeta\vartheta : \vartheta\delta$, so ist $\zeta\vartheta > \vartheta\varepsilon$. [*Command. CLXXXVIII.*]

Da Quadrat über $\gamma\eta$: Quadrat über $\eta\alpha$ < Quadrat über $\zeta\vartheta$:



Quadrat über $\delta\vartheta$, aber Quadrat über $\gamma\eta$ = Rechteck $\beta\eta \cdot \eta\gamma$, so ist auch Rechteck $\beta\eta \cdot \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\alpha$ < Quadrat über $\zeta\vartheta$: Quadrat über $\vartheta\delta$; nun ist aber Rechteck $\beta\eta \cdot \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\alpha$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\delta$, folglich Rechteck $\varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\delta$: < Quadrat über $\zeta\vartheta$: Quadrat über $\vartheta\delta$, mithin Quadrat über $\zeta\vartheta$ > Rechteck $\varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\zeta$, daher $\vartheta\zeta > \vartheta\varepsilon$.

Τοῦ γ̄.

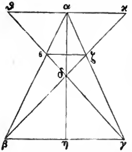
Καταγραφὴ ἡ αβγδεζη, ἔστω δὲ ἴση ἡ βη τῇ ηγ· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ βγ. Ἤχθω διὰ τοῦ α τῇ βγ παράλληλος ἡ θκ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ βζ, γε ἐπὶ τὰ κ, θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βη τῇ ηγ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ θα τῇ ακ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν θα, τουτέστιν ὡς ἡ βε πρὸς τὴν εα οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν κα, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζα· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ βγ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἴσας ἔχοντα τὰς α, δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ βαγ τῷ ὑπὸ εδζ· ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἤχθωσαν κάθετοι αἱ βη, εθ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ηβ πρὸς τὴν βα οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν εδ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ βη, αγ πρὸς τὸ ὑπὸ βα, αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εθ, δζ πρὸς τὸ ὑπὸ εδζ· ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ βαγ τῷ ὑπὸ εδζ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ βη, αγ τῷ ὑπὸ εθ, δζ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ βη, αγ ἥμισύ ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ εθ, δζ ἥμισύ ἐστι τὸ δεζ τρίγωνον· καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. φανερὸν δὴ ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν.

Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ παράλληλος ἡ δε τῇ βγ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ αδ οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ αδε τρίγωνον. Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ αδε τριγώνῳ, τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ αδε τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βα πρὸς αδ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βα πρὸς τὴν αδ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ οὕτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ αδε τρίγωνον.

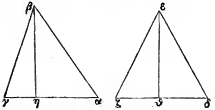
Zum dritten Buch (der Kegelschnitte).

Wenn in der Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, [*Command. CLXXXIX.*] $\beta\eta = \eta\gamma$ ist, so ist $\varepsilon\zeta \parallel \beta\gamma$.



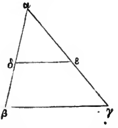
Man ziehe durch α $\vartheta\varkappa \parallel \beta\gamma$ und verlängere $\beta\zeta$, $\gamma\varepsilon$ bis zu $\varkappa$, ϑ. Da nun $\beta\eta = \eta\gamma$, so ist auch $\vartheta\alpha = \alpha\varkappa$, folglich $\beta\gamma : \vartheta\alpha$ d. h. $\beta\varepsilon : \varepsilon\alpha = \beta\gamma : \varkappa\alpha$ d. h. $\gamma\zeta : \zeta\alpha$, mithin $\varepsilon\zeta \parallel \beta\gamma$.

Sind in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ [*Command. CXC.*] die Winkel α und δ gleich und ist Rechteck $\beta\alpha . \alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\eta$, so ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma = \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$.



Fällt man die Senkrechten $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$, so ist $\eta\beta : \beta\alpha = \varepsilon\vartheta : \varepsilon\delta$, folglich Rechteck $\beta\eta . \alpha\gamma$: Rechteck $\beta\alpha . \alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta . \delta\zeta$: Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\zeta$; aber Rechteck $\beta\alpha . \alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta . \delta\zeta$, mithin Rechteck $\beta\eta . \alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta . \varepsilon\vartheta . \delta\zeta$. Nun ist $\frac{1}{2}$ Rechteck $\beta\eta . \alpha\gamma = \triangle\,\alpha\beta\gamma$ und $\frac{1}{2}$ Rechteck $\delta\zeta = \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$, folglich $\Delta\ \alpha\beta\gamma = \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$. Offenbar sind auch die Parallelogramme, die das Doppelte davon sind, einander gleich.

Ist im Dreieck $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon \parallel \beta\gamma$, so ist [*Command. CXCI.*] Quadrat über $\beta\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta = \triangle\ \alpha\beta\gamma : \triangle\ \alpha\delta\varepsilon$.



Da $\triangle\ \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\ \alpha\delta\varepsilon$, so ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma : \triangle\ \alpha\delta\varepsilon = (\beta\alpha : \alpha\delta) + (\beta\alpha : \alpha\delta)$; aber es ist auch Quadrat über $\beta\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta = (\beta\alpha : \alpha\delta) + (\beta\alpha : \alpha\delta)$, folglich Quadrat über $\beta\alpha$: Quadrat über $\alpha\delta = \triangle\ \alpha\beta\gamma : \Delta\ \alpha\delta\varepsilon$.

Ἴσαι αἱ αβ, γδ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ ε· ὅτι τὸ ὑπὸ γεβ τοῦ ὑπὸ γαβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ δεα. Τετμήσθω ἡ βγ δίχα τῷ ζ· τὸ ζ ἄρα διχοτομία ἐστὶ καὶ τῆς αδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ γεβ μετὰ τοῦ ἀπὸ βζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ δεα μετὰ τοῦ ἀπὸ αζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ αζ ἴσον τῷ ὑπὸ γαβ μετὰ τοῦ ἀπὸ βζ. κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ βζ. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ γεβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ γαβ καὶ τῷ ὑπὸ δεα, ὥστε τὸ ὑπὸ γεβ τοῦ ὑπὸ γαβ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ δεα. ὅπερ: —

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν α, β σημείων, τὸ ὑπὸ γεβ τοῦ ὑπὸ γαβ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ [τῷ ὑπὸ δεα][1]) οὗπέρ ἐστι κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις. ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν β, γ, τὸ ὑπὸ γεβ τοῦ ὑπὸ αεδ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ αβδ, τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ.

Ἴση ἡ αβ τῇ βγ, καὶ δύο σημεῖα τὰ δ, ε· ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ αδγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ αεγ καὶ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν βδ, βε τετραγώνων. Τοῦτο δὲ φανερόν· τὸ μὲν γὰρ δὶς ἀπὸ αβ, διὰ τῶν διχοτομιῶν, ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ αδγ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ δβ, τὸ δὲ δὶς ἀπὸ αβ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ αεγ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ εβ τετραγώνῳ.

Ἴση ἡ αβ τῇ γδ, καὶ σημεῖον τὸ ε· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αε, εδ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν βε, εγ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγδ. Τετμήσθω [δίχα][2]) ἡ βγ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ἀπὸ τῆς δζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ αγδ καὶ δὶς

[1]) Einschaltung von *Halley*.
[2]) Einschaltung von *Halley*.

Wenn $\alpha\beta = \gamma\delta$ und ε ein beliebiger [*Command. CXCII.*] Punkt, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ um das Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha$ grösser als Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\beta$.



Ist $\beta\gamma$ in ζ halbirt, so halbirt auch ζ die Linie $\alpha\delta$. Da nun Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ + Quadrat über $\beta\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\zeta$ und Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha$ + Quadrat über $\alpha\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\zeta$, so ist auch Quadrat über $\alpha\zeta$ = Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\beta$ + Quadrat über $\beta\zeta$. Subtrahirt man auf beiden Seiten das Quadrat über $\beta\zeta$, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\beta$ + Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha$, folglich ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ um das Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha$ grösser als Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\beta$, was zu beweisen war.

Nimmt man den Punkt ε zwischen [*Command. CXCIII*] α und β an, so ist Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ um das Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\alpha$ kleiner als Rechteck



$\gamma\alpha \,.\, \alpha\beta$, was auf dieselbe Weise bewiesen wird.

Liegt endlich der Punkt ε zwischen β [*Command. CXCIV.*] und γ, so lässt



sich auf dieselbe Weise darthun, dass Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ um das Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\delta$ kleiner ist als das Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta$.

Wenn $\alpha\beta = \beta\gamma$ und δ, ε zwei [*Command. CXCV.*] Punkte, so ist 4 Quadrat über $\alpha\beta$ = 2 Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ + 2 Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ + 2 (Quadrat über $\beta\delta$ + Quadrat über $\beta\varepsilon$).



Der Beweis ist leicht, denn 2 Quadrat über $\alpha\beta$ = 2 Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\gamma$ + 2 Quadrat über $\delta\beta$, und 2 Quadrat über $\alpha\beta$ = 2 Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ + 2 Quadrat über $\varepsilon\beta$.

Ist $\alpha\beta = \gamma\delta$ und ε ein Punkt, so [*Command. CXCVI.*] ist Quadrat über $\alpha\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + 2 Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \gamma\delta$.

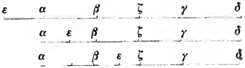
ἀπὸ γζ, ἀλλὰ κοινοῦ προστεθέντος τοῦ δὶς ἀπὸ εζ, ἴσον ἐστὶ τό τε δὶς ὑπὸ αγδ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εζγ τοῖς δὶς ἀπὸ τῶν δζ, ζε τετραγώνοις· ἀλλὰ τοῖς μὲν δὶς ἀπὸ δζ, ζε ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αε, εδ τετράγωνα, τοῖς δὲ δὶς ἀπὸ τῶν γζ, ζε ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν βε, εγ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αε, εδ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν βε, εγ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγδ.

Ἔστω τὸ ὑπὸ βαγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ ἴσον τῷ ἀπὸ δα· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ γδ τῇ δβ. Κοινὸν γὰρ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ γδ, [1]) *λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ αγ, δβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δγα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δγ τῇ δβ.*

Ἔστω τὸ ὑπὸ αγβ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ ἴσον τῷ ἀπὸ δβ τετραγώνῳ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δβ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ δε· τὸ ἄρα ὑπὸ γβε μετὰ τοῦ ἀπὸ δε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γδ, ἴσον τῷ ἀπὸ δβ, τουτέστι τῷ ὑπὸ αγβ μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ, ὥστε τὸ ὑπὸ γβε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αγβ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ εβ. ἀλλὰ καὶ ἡ γδ τῇ δε, ὅλη ἄρα ἡ αδ ὅλῃ τῇ δβ ἴση ἐστίν.

Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ βαγ μετὰ τοῦ ἀπὸ δβ ἴσον τῷ ἀπὸ αδ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ γδ τῇ δβ. Κείσθω τῇ δβ ἴση ἡ αε. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ βαγ μετὰ τοῦ ἀπὸ δβ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ εα, ἴσον

[1]) *Halley* hat hier Folgendes eingeschaltet: *τὸ ἄρα ὑπὸ βαγ ἴσον ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ αδ, δγ ὑπεροχῇ, τουτέστι τοῖς ὑπὸ τῶν δαγ, αγδ· τὸ δὲ ὑπὸ βαγ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δαγ καὶ τῷ ὑπὸ βδ, αγ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ δαγ,*



Man halbire $\beta\gamma$ in ζ. Da nun 2 Quadrat über $\delta\zeta$ = 2 Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ + 2 Quadrat über $\gamma\zeta$, so ist, wenn 2 Quadrat über $\varepsilon\zeta$ hinzuaddirt wird,

2 Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$ + 2 (Quadrat über $\gamma\zeta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$) = 2 (Quadrat über $\delta\zeta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$);

aber 2 (Quadrat über $\delta\zeta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$) = Quadrat über $\alpha\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\delta$,

2 (Quadrat über $\gamma\zeta$ + Quadrat über $\zeta\varepsilon$) = Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$,

folglich Quadrat über $\alpha\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\beta\varepsilon$ + Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + 2 Rechteck $\alpha\gamma.\gamma\delta$.

Wenn Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\gamma$ + Quadrat [*Command. CXCVII.*] über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\delta\alpha$, so ist $\delta\gamma = \delta\beta$.



Denn subtrahirt man Quadrat über $\gamma\delta$, so ist Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$ — Quadrat über $\gamma\delta$ = Rechteck $\delta\alpha \cdot \alpha\gamma$ + Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$; aber Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\gamma$ = Rechteck $\delta\alpha \cdot \alpha\gamma$ + Rechteck $\beta\delta \cdot \alpha\gamma$. Subtrahirt man das gemeinsame Rechteck $\delta\alpha \cdot \alpha\gamma$, so ist Rechteck $\beta\delta \cdot \alpha\gamma$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\delta$, folglich $\gamma\delta = \delta\beta$.

Wenn Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\beta$ + Quadrat [*Command. CXCVIII.*] über $\gamma\delta$ = Quadrat über $\delta\beta$, so ist $\alpha\delta = \delta\beta$.



Macht man $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, so ist Rechteck $\gamma\beta \cdot \beta\varepsilon$ + Quadrat über $\delta\varepsilon$ (d. h. Quadrat über $\gamma\delta$) = Quadrat über $\delta\beta$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\beta$ + Quadrat über $\gamma\delta$, folglich Rechteck $\gamma\beta \cdot \beta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\gamma \cdot \gamma\beta$, mithin $\alpha\gamma = \beta\varepsilon$; aber $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, daher $\alpha\delta = \delta\beta$.

Ist wiederum Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\gamma$ + [*Command. CXCIX.*] Quadrat über $\delta\beta$ = Quadrat über $\alpha\delta$, so ist $\gamma\delta = \delta\beta$.

Man mache $\delta\beta = \varepsilon\alpha$. Da nun Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\gamma$ + Quadrat

ἐστὶ τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ δαγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ βδ, αγ, τουτέστι τὸ ὑπὸ εαγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ εα, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ γεα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αδγ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εα, τουτέστιν ἡ βδ, τῇ δγ.

Εὐθεῖα ἡ αβ, ἐφ᾽ ἧς τρία σημεῖα τὰ γ, δ, ε, οὕτως ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν βε τῇ εγ, τὸ δὲ ἀπὸ δε [1]) τῷ ἀπὸ εγ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ βα πρὸς αγ οὕτως ἡ βδ πρὸς δγ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ αεδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εγ, ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δὶς τὰ ἡγουμένα καὶ διελόντι, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ βδ πρὸς δγ.

Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ βγδ ἴσον τῷ ἀπὸ γε, ἴση δὲ ἡ αγ τῇ γε· ὅτι τὸ ὑπὸ [αβε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γβδ] [2]). Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ βγδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ γε, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ βγ πρὸς γε, τουτέστι πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ γε, τουτέστιν ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ· καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ ἀναστρέψαντι καὶ χωρίον χωρίῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ αβε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γβδ. Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ αδε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδγ· ἐὰν γὰρ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ γδ κοινὸν ἀπὸ τῆς τοῦ ἀπὸ γε πρὸς τὸ ὑπὸ βγδ ἰσότητος, γίνεται.

Εἰς δύο παραλλήλους τὰς αβ, γδ, διά τε τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ε, τρεῖς διήχθωσαν αἱ αεδ, βεγ, ζεη· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ὑπὸ αζβ οὕτω τὸ ὑπὸ γεδ πρὸς τὸ ὑπὸ γηδ. Διὰ τοῦ συνημμένου, φανερόν· ὡς μὲν γὰρ ἡ αε πρὸς τὴν εδ οὕτως ἡ αζ πρὸς τὴν ηδ, ὡς δὲ ἡ βε πρὸς τὴν εγ οὕτως ἡ ζβ πρὸς τὴν ηγ, καὶ σύγκειται ἐκ τούτων τὰ χωρία· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν. [3]) Ἐστὶ δὲ καὶ οὕτω μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν εγ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ οὕτω τὸ ὑπὸ δεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ

---

[1]) So die Hdsch. *Halley* emendirt ὑπὸ αεδ.

[2]) Einschaltung von *Halley*.

[3]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben μὲν ī ἄρα.



über $\delta\beta$ (d. h. Quadrat über $\varepsilon\alpha$) = Quadrat über $\alpha\delta$, so ist, wenn Rechteck $\delta\alpha\,.\,\alpha\gamma$ subtrahirt wird, Rechteck $\beta\delta\,.\,\alpha\gamma$ (d. h. Rechteck $\varepsilon\alpha\,.\,\alpha\gamma$) + Quadrat über $\varepsilon\alpha$ (= Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\alpha$) = Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\gamma$, mithin $\varepsilon\alpha$ d. h. $\beta\delta = \delta\gamma$.

Werden auf der Linie $\alpha\beta$ die Punkte [*Command. CC.*] γ, δ, ε angenommen, so dass $\beta\varepsilon = \varepsilon\gamma$ und Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\gamma\varepsilon$, so ist $\beta\alpha : \alpha\gamma = \beta\delta : \delta\gamma$.



Da Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$, so ist $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta$, mithin $\alpha\varepsilon : \alpha\gamma = \varepsilon\gamma : \gamma\delta$ und $2\,\alpha\varepsilon : \alpha\gamma = 2\,\varepsilon\gamma : \gamma\delta$ d. h. $\alpha\beta + \alpha\gamma : \alpha\gamma = \gamma\beta : \gamma\delta$, folglich $\alpha\beta : \alpha\gamma = \delta\beta : \gamma\delta$.

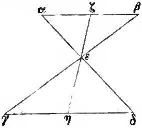
Wenn wiederum Rechteck $\beta\gamma\,.\,\gamma\delta$ = [*Command. CCI.*] Quadrat über $\gamma\varepsilon$ und $\alpha\gamma = \gamma\varepsilon$, so ist Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\varepsilon$ = Rechteck $\gamma\beta\,.\,\beta\delta$.



Da Rechteck $\beta\gamma\,.\,\gamma\delta$ = Quadrat über $\gamma\varepsilon$, so ist $\beta\gamma : \gamma\varepsilon$ (d. h. $\alpha\gamma$) = $\gamma\varepsilon$ (d. h. $\alpha\gamma$) : $\gamma\delta$, mithin $\alpha\beta : \alpha\gamma = \alpha\delta : \gamma\delta$, und $\delta\beta : \delta\varepsilon = \alpha\beta : \alpha\gamma$, $\delta\beta : \varepsilon\beta = \alpha\beta : \gamma\beta$, folglich Rechteck $\gamma\beta\,.\,\beta\delta$ = Rechteck $\alpha\beta\,.\,\beta\varepsilon$.

Offenbar ist auch Rechteck $\alpha\delta\,.\,\delta\varepsilon$ = Rechteck $\beta\delta\,.\,\delta\gamma$; dies ergiebt sich, wenn von Quadrat über $\gamma\varepsilon$ = Rechteck $\beta\gamma\,.\,\gamma\delta$ das Quadrat über $\gamma\delta$ subtrahirt wird.

Wenn durch denselben Punkt ε an [*Command CCII.*] zwei Parallelen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ drei Linien $\alpha\varepsilon\delta$, $\beta\varepsilon\gamma$, $\zeta\varepsilon\eta$ gezogen werden, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon\,.\,\varepsilon\beta$: Rechteck $\alpha\zeta\,.\,\zeta\beta$ = Rechteck $\gamma\varepsilon\,.\,\varepsilon\delta$: Rechteck $\gamma\eta\,.\,\eta\delta$.



Es folgt dies leicht durch Zusammensetzung der Verhältnisse; nämlich $\alpha\varepsilon : \varepsilon\delta = \alpha\zeta : \eta\delta$, $\beta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \zeta\beta : \eta\gamma$, mithin Rechteck $\alpha\varepsilon\ \beta\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\varepsilon\gamma$ = Rechteck $\alpha\zeta\,.\,\zeta\beta$: Rechteck $\eta\delta\,.\,\eta\gamma$.

Dasselbe lässt sich auch, ohne die Zusammensetzung der Verhält-

ἀπὸ βζ οὕτω τὸ ἀπὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γη, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ἀπὸ ζβ οὕτω τὸ ὑπὸ γεδ πρὸς τὸ ἀπὸ γη. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ζβ πρὸς τὸ ὑπὸ βζα οὕτω τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηδ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ὑπὸ αζβ οὕτω τὸ ὑπὸ γεδ πρὸς τὸ ὑπὸ γηδ.

Τοῦ ε̅.

Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ αδ· λέγω ὅτι εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βδγ τῷ ἀπὸ αδ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ α γωνία· εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα· εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα. Ἔστω πρότερον ἴσον· ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ α γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εγ. ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βεγ γωνία καὶ αὐτῆς μείζων ἡ α γωνία· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πάλιν ἔλασσον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, ζγ· ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βζγ γωνία καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ α γωνία.

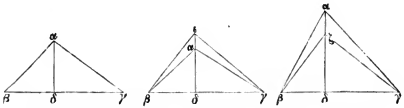
Θέσει οὐσῶν [πρὸς ὀρθὰς] [1]) δύο εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ δ· γράψαι διὰ τοῦ δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς αβ, βγ. Γεγονέτω· κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστι τὸ β. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ δβ, καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμε-

[1]) Einschaltung von *Halley*.

nisse in Anspruch zu nehmen, auf folgende Weise darthun. Da $\alpha\varepsilon : \varepsilon\beta = \delta\varepsilon : \varepsilon\gamma$, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$: Quadrat über $\varepsilon\beta$ = Rechteck $\delta\varepsilon . \varepsilon\gamma$: Quadrat über $\varepsilon\gamma$; aber Quadrat über $\varepsilon\beta$: Quadrat über $\beta\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$: Quadrat über $\gamma\eta$, mithin Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$: Quadrat über $\beta\zeta$ = Rechteck $\delta\varepsilon . \varepsilon\gamma$: Quadrat über $\gamma\eta$; nun ist auch Quadrat über $\beta\zeta$: Rechteck $\beta\zeta . \zeta\alpha$ = Quadrat über $\gamma\eta$: Rechteck $\gamma\eta . \eta\delta$, folglich Rechteck $\alpha\varepsilon . \varepsilon\beta$: Rechteck $\beta\zeta . \zeta\alpha$ = Rechteck $\delta\varepsilon . \varepsilon\gamma$: Rechteck $\gamma\eta . \eta\delta$.

Zum fünften Buch (der Kegelschnitte).

Wird in dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Senk- [*Command. CCIII.*] rechte $\alpha\delta$ gefällt, so ist, wenn das Rechteck $\beta\delta . \delta\gamma$ = Quadrat über $\alpha\delta$, $\angle\ \alpha$ ein rechter; ist das Rechteck grösser als das Quadrat, so ist derselbe ein stumpfer, ist es kleiner, ein spitzer Winkel.



Ist zuerst das Rechteck gleich dem Quadrat, so stehen die Seiten, die gleiche Winkel einschliessen, in Proportion, folglich $\angle\ \alpha = \angle\ \delta$, mithin $\angle\ \alpha$ ein rechter. Ist das Rechteck grösser, und es sei dem Quadrat über $\delta\varepsilon$ gleich, so ist, wenn die Linien $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$ gezogen werden, $\angle\ \beta\varepsilon\gamma$ ein rechter, mithin $\angle\ \alpha$ grösser. Wenn ferner das Rechteck kleiner als das Quadrat, und dem Quadrat über $\delta\zeta$ gleich ist, so wird, wenn die Linien $\beta\zeta$, $\zeta\gamma$ gezogen werden, $\angle\ \beta\zeta\gamma$ ein rechter, mithin ist $\angle\ \alpha$ kleiner, demnach ein spitzer Winkel.

Es sind die auf einander senkrecht [*Command. CCIV.*] stehenden Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und der Punkt δ gegeben; es soll durch den Punkt δ eine Hyperbel beschrieben werden, so dass $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ Asymptoten derselben werden.

τρος ἄρα ἐστίν. κείσθω τῇ δβ ἴση ἡ βε, δοθεῖσα ἄρα ἐστίν, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ ε, καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ κάθετος ἡ δζ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ζ· καὶ κείσθω τῇ βζ ἴση ἡ ζγ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α· θέσει ἄρα ἐστίν. θέσει δὲ καὶ ἡ αβ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ α. ἔστι δὲ καὶ τὸ γ δοθέν. δέδοται ἄρα ἡ αγ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ αδ τῇ δγ, διὰ τὸ καὶ τὴν βζ τῇ ζγ ἴσην εἶναι. ἔστω δὴ ὀρθία τοῦ πρὸς τῇ εδ εἴδους ἡ δη, ἑκατέρα ἄρα τῶν αδ, δγ δυνάμει ἐστὶ [τὸ τέταρτον] [1]) τοῦ ὑπὸ εδη. ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀπὸ αγ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ εδη τῷ ἀπὸ αγ τετραγώνῳ· δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ αγ τετράγωνον, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εδη. καὶ ἔστι δοθεῖα ἡ εδ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ηδ, ὥστε [2]) δοθὲν τὸ η. ἐπεὶ οὖν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν εδ, δη ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ἀπὸ δοθέντος [τοῦ δ ὑπὸ τῆς αδβ γωνίας] [3]) γίνεται ὑπερβολή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ εδ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αδβ, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν δη παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα, ἃ αὐταὶ [4]) ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ᾽ εὐθείας τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ εδη· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ βε. καὶ ἤχθω κάθετος ἡ δζ, καὶ τῇ εζ ἴση κείσθω ἡ ζγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ α, καὶ τῇ δε προσανήχθω ἡ δη, καὶ τῷ ἀπὸ αγ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ εδη· καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει λέγομεν, περὶ διάμετρον δε ὑπερβολή· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βζ τῇ ζγ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αδ τῇ δγ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ἀπὸ αδ, δγ δυνάμει δ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου, τουτέστι τῶν ὑπὸ εδη, τουτέστι τοῦ πρὸς τῇ εδ διαμέτρῳ εἴδους. ἐὰν δὲ ᾖ τοῦτο, δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ, ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ αβ, βγ τῆς ὑπερβολῆς.

---

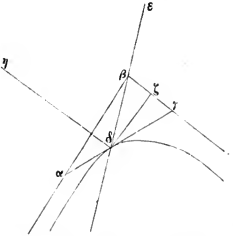
[1]) Einschaltung von *Commandin.*

[2]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben ἔστω.

[3]) Einschaltung von *Halley.*

[4]) Die Handschriften haben αὗται.

Es sei geschehen, so ist β der Mittelpunkt derselben. Zieht man die Linie $\beta\delta$ und verlängert sie, so wird sie ein Durchmesser sein. Ist nun $\beta\varepsilon = \beta\delta$, wodurch $\beta\varepsilon$ gegeben, so ist auch der Punkt ε gegeben und der Endpunkt des Durchmessers. Fällt man von δ auf $\beta\gamma$ die Senkrechte $\delta\zeta$ und macht $\zeta\gamma = \beta\zeta$, so ist der Punkt γ gegeben. Wird ferner die Linie $\gamma\delta$ gezogen und bis α verlängert, so ist $\gamma\alpha$ der Lage nach gegeben, und da $\alpha\beta$ ebenfalls der Lage



nach gegeben ist, so ist auch der Punkt α gegeben. Mithin ist, da der Punkt γ gegeben ist, $\alpha\gamma$ der Grösse nach gegeben, und es ist $\alpha\delta = \delta\gamma$, weil $\beta\zeta = \zeta\gamma$. Ist nun $\delta\eta$ der Parameter zum Durchmesser $\delta\varepsilon$, so ist das Quadrat von $\alpha\delta$ sowohl als von $\delta\gamma$ gleich $\frac{1}{4}$ Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\eta$, und auch gleich $\frac{1}{4}$ Quadrat über $\alpha\gamma$, daher Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\eta$ = Quadrat über $\alpha\gamma$. Nun ist das Quadrat über $\alpha\gamma$ gegeben, folglich auch Rechteck $\varepsilon\delta\,.\,\delta\eta$, daher ist, weil $\varepsilon\delta$ gegeben, auch $\eta\delta$ gegeben und mithin der Punkt η. Da nun $\varepsilon\delta$, $\delta\eta$ in einer Ebene auf einander senkrecht der Lage nach gegeben sind, so geht auch durch den gegebenen Punkt δ unter dem Winkel $\alpha\delta\beta$ die Hyperbel, deren Durchmesser $\varepsilon\delta$ und deren Scheitel δ; die Ordinaten werden unter dem gegebenen Winkel $\alpha\delta\beta$ gezogen und ihre Quadrate sind gleich den Flächenräumen die an $\delta\eta$ anliegen und deren Breiten auf dem verlängerten Durchmesser vom Punkt δ aus durch die Ordinaten abgeschnitten werden, und die grösser sind als die ähnliche Figur $\varepsilon\delta\,.\,\delta\eta$

Die Synthesis der Aufgabe ist die folgende. Die der Lage nach gegebenen Linien seien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, der gegebene Punkt sei δ.

Θέσει εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δοθὲν τὸ γ [1]*· διήχθω ἡ βγ, κείσθω δοθεῖσα ἡ βδ, ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ δε· ὅτι τὸ ε ἅπτεται θέσει κώνου τομῆς ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ γ. Ἤχθω κάθετος ἡ γζ, [καὶ τῇ βδ ἴση κείσθω ἡ ζα]* [2] *δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ α. ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ αη· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ αη συμπίπτουσα τῇ βγ· ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ η. καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν βα, αη, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ γ, ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους ηα, αβ ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ τῇ εη, ἐπεὶ καὶ ὅλη [βε τῇ ηγ]* [3] *καὶ ἔσται διὰ τὸ προγεγραμμένον. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ γ. ἡ δὲ διάμετρος ἡ βγ* [4]*, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ ϑ, καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς γζ, ἡ ζα. καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ αη, συμπιπτέτω τῇ βη κατὰ τὸ η. καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ηα, αβ διὰ δοθέντος τοῦ γ γεγράφθω ὑπερβολή· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα,. τουτέστιν ὅτι [οἷα]* [5] *ἐὰν κάθετος ἀχθῇ ἡ εδ, ἴση γίνεται ἡ βδ τῇ ϑ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους· ἴση ἡ εη τῇ γβ, ὥστε καὶ ἡ αδ τῇ ζβ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ, τουτέστιν ἡ ϑ, ἴση ἐστὶ τῇ βδ. ὅπερ: —*

---

[1]) So emendirt *Halley*; die Hdsch. haben *δοθεῖσα τὸ γ.*

[2]) Einschaltung von *Commandin.*

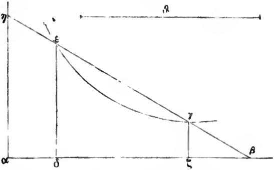
[3]) Einschaltung von *Halley.*

[4]) So die Hdsch. *Halley* hat emendirt: *ἡ δὲ διηγμένη ἡ βγ.*

[5]) Einschaltung von *Halley.*

Man ziehe $\beta\delta$ und verlängere sie bis ε, so dass $\beta\varepsilon = \beta\delta$, fälle die Senkrechte $\delta\zeta$ und es sei $\gamma\zeta = \beta\zeta$, ziehe $\gamma\delta$ und verlängere sie bis α. Alsdann construire an $\delta\varepsilon$ die $\delta\eta$ so dass Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\eta$, und beschreibe, wie in der Analysis gezeigt ist, für den Durchmesser $\delta\varepsilon$ die Hyperbel. Sie wird der Aufgabe genügen. Denn da $\beta\zeta = \zeta\gamma$, so ist $\alpha\delta = \delta\gamma$; das Quadrat einer jeden derselben ist = $\frac{1}{4}$ Quadrat über $\alpha\gamma$ = $\frac{1}{4}$ Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\eta$, d. h. der für den Durchmesser $\delta\varepsilon$ construirten Figur. Ist dies aber, so ist im zweiten Buche der Kegelschnitte gezeigt, dass die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ die Asymptoten der Hyperbel sind.

Es sei die Gerade $\alpha\beta$ der Lage nach [*Command. CCV.*] und der Punkt γ gegeben; man ziehe $\beta\gamma$, und es sei $\beta\delta$ gegeben und die Senkrechte $\delta\varepsilon$ errichtet, so wird der Punkt ε auf der Hyperbel liegen, die durch den Punkt γ geht.



Fällt man die Senkrechte $\gamma\zeta$ und macht $\zeta\alpha = \beta\delta$, so ist der Punkt α gegeben. Errichtet man die Senkrechte $\alpha\eta$, so ist sie der Lage nach gegeben und wird von der verlängerten $\beta\gamma$ im Punkte η geschnitten. Da also $\alpha\beta$, $\alpha\eta$ der Lage nach gegeben sind, so wird nach dem Vorausgegangenen die Hyperbel, die durch den Punkt γ für $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ als Asymptoten beschrieben ist, durch den Punkt ε gehen, weil $\varepsilon\eta = \beta\gamma$, indem $\beta\varepsilon = \eta\gamma$.

Die Synthesis geschieht auf folgende Weise. Es sei $\alpha\beta$ der

Ἔστω ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ· ὅτι τῶν βα, αγ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ αδ. Κείσθω τῇ γδ ἴση ἡ δε. κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ γβε πρὸς τὸ ὑπὸ αγ, εβ, οὕτω τὸ ὑπὸ γβε πρὸς τὸ ἀπὸ εδ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ αη, εβ τῷ ἀπὸ δε, τουτέστι τῷ ὑπὸ γδε. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δε, τουτέστι πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δα πρὸς αγ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν αγ, ὥστε τῶν βα, αγ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ αδ.

Ἔστω τὸ ὑπὸ αβγ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ αγ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ. Κείσθω τῇ αγ ἴση ἡ αδ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ γδα ἴσον τῷ ὑπὸ αβγ. καὶ παρὰ τὴν αὐτὴν · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δα, τουτέστιν ἡ αγ, τῇ γβ.

Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς αβ, βγ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ δε, δζ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις. Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω εἰς τομὰς εὐθεῖα ἡ αδεζγ[1]*· ἔσται δὴ διὰ μὲν τῆς δζ τομῆς ἴση ἡ αδ τῇ ζγ, διὰ δὲ τῆς δε τομῆς ἴση ἡ αδ τῇ εγ, ὥστε ἡ γζ τῇ γε ἴση ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις. λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ [εἰς]*[2]*) ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ θκ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος μν ἧς πέρας τὸ μ· ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ μλν πρὸς τὸ ἀπὸ λξ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ηοπ πρὸς τὸ ἀπὸ ορ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς*

---

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben *διήχθωσαν εἰς τομὰς εὐθεῖαι αἱ ηα, δζ, εγ.*

[2]) Einschaltung von *Halley*.

Lage nach und der Punkt γ gegeben; man ziehe $\beta\gamma$, fälle die Senkrechte $\gamma\zeta$, mache $\zeta\alpha$ der gegebenen Geraden ϑ gleich, und errichte in α die Senkrechte $\alpha\eta$, welche die verlängerte $\beta\gamma$ in η schneidet. Alsdann beschreibe man für $\eta\alpha$, $\alpha\beta$ als Asymptoten durch den gegebenen Punkt γ die Hyperbel. Sie wird der Aufgabe genügen, d. h. wenn man irgend eine Senkrechte $\varepsilon\delta$ fällt, so wird $\beta\delta = \vartheta$ sein. Dies erhellt durch die Asymptoten, denn es ist $\varepsilon\eta = \gamma\beta$ und daher $\alpha\delta = \zeta\beta$, folglich $\alpha\zeta$ d. h. $\vartheta = \beta\delta$.

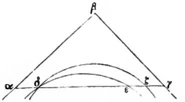
Wenn $\beta\alpha : \alpha\gamma =$ Quadrat über $\beta\delta$: [*Command. CCVI.*] Quadrat über $\delta\gamma$, so ist $\alpha\delta$ die mittlere Proportionale zwischen $\beta\alpha$ und $\alpha\gamma$.

α γ δ ε β Es sei $\delta\varepsilon = \gamma\delta$. Nun ist $\beta\gamma : \gamma\alpha$ (d. h. Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$: Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \varepsilon\beta$) = Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\delta$, mithin Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \varepsilon\beta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$ = Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$, folglich $\beta\delta : \delta\varepsilon$ (d. h. $\gamma\delta$) $= \delta\alpha : \alpha\gamma$, und $\beta\alpha : \alpha\delta = \alpha\delta : \alpha\gamma$, d. h. $\alpha\delta$ ist die mittlere Proportionale zwischen $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$.

Wenn Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma = 2$ Quadrat [*Command. CCVII.*] über $\alpha\gamma$, so ist $\alpha\gamma = \gamma\beta$.

δ α γ β Es sei $\alpha\delta = \alpha\gamma$, so ist Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\alpha$ = Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\gamma$, und da beide an derselben Linie $\beta\delta$ liegen, so ist $\alpha\delta$ d. h. $\alpha\gamma = \gamma\beta$.

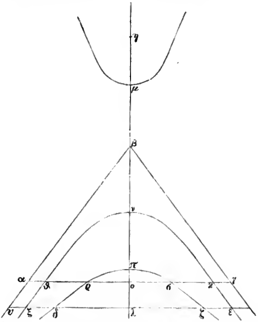
Zu denselben Asymptoten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ [*Command. CCVIII.*] sind die Hyperbeln $\delta\varepsilon$, $\delta\eta$ beschrieben; es wird behauptet, dass diese einander nicht schneiden.



Angenommen sie schnitten sich im Punkte δ und es sei von δ durch die Kegelschnitte die Linie $\alpha\delta\varepsilon\zeta\gamma$ gezogen, so ist, wegen des Kegelschnitts $\delta\zeta$, $\alpha\delta = \zeta\gamma$, und wegen des Kegelschnitts $\delta\varepsilon$, $\alpha\delta = \varepsilon\gamma$, folglich $\gamma\zeta = \gamma\varepsilon$, was unmöglich ist. Mithin können diese Kegelschnitte einander nicht treffen.

τὴν ὀρθίαν· ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ μλν πρὸς τὸ ἀπὸ λξ οὕτω τὸ ὑπὸ ηοπ πρὸς τὸ ἀπὸ ορ, καὶ ἐναλλὰξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ λμν τοῦ ὑπὸ ηοπ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ξζ τῆς θσ, καὶ ἔστι διὰ τὰς τομὰς ἴσον τὸ ὑπὸ ζξδ τῷ ὑπὸ σθρ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ξδ τῆς θρ, ὥστε ἀεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα· ἀλλὰ καὶ παράκεινται. εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς.

Es wird nun behauptet, dass diese Kegelschnitte ins Unbegränzte verlängert einander immer näher kommen und ihr Abstand



immer kleiner wird. Wird nämlich irgend eine andere Hyperbel $\vartheta\nu\varkappa$ construirt und ist $\mu\nu$ der Durchmesser, dessen Endpunkt μ, so ist Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu$: Quadrat über $\lambda\xi$ = Durchmesser zum Parameter, und Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$: Quadrat über $o\varrho$ = Durchmesser zum Parameter, daher Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu$: Quadrat über $\lambda\xi$ = Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$: Quadrat über $o\varrho$. Aber Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu >$ Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$ [1]), deshalb $\xi\zeta > \vartheta\sigma$, mithin, da wegen der Kegelschnitte Rechteck $\zeta\xi \,.\, \xi\delta$ = Rechteck $\sigma\vartheta \,.\, \vartheta\varrho$, $\xi\delta < \vartheta\varrho$. Daher kommen die Kegelschnitte einander immer näher, bleiben aber neben einander, denn wenn ein jeder den Asymptoten immer näher kommt, so kommen sie auch sich selbst immer näher.

---

[1]) *Commandin* sowohl als *Halley* bemerken, dass der Beweis hier lückenhaft ist. Der letztere giebt folgenden Beweis: Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu$: Quadrat über $\lambda\xi$ = Rechteck $\eta\lambda \,.\, \lambda\pi$: Quadrat über $\lambda\delta$, und Rechteck $\mu o \,.\, o\nu$: Quadrat über $o\vartheta$ = Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$: Quadrat über $o\varrho$, da alle diese Verhältnisse dem Verhältniss des Durchmessers zum Parameter gleich sind; mithin verhalt sich Durchmesser zum Parameter wie Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu$ — Rechteck $\eta\lambda \,.\, \lambda\pi$ zu Quadrat über $\lambda\xi$ — Quadrat über $\lambda\delta$ (d. h. = Rechteck $\zeta\xi \,.\, \xi\delta$), und wie Rechteck $\mu o \,.\, o\nu$ — Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$ zu Quadrat über $o\vartheta$ — Quadrat über $o\varrho$ (d. h. Rechteck $\sigma\vartheta \,.\, \vartheta\varrho$). Aber Rechteck $\mu\lambda \,.\, \lambda\nu$ — Rechteck $\eta\lambda \,.\, \lambda\pi$ = Rechteck $\mu o \,.\, o\nu$ — Rechteck $\eta o \,.\, o\pi$, denn es sind diese Differenzen gleich Rechteck $\mu\pi \,.\, \pi\nu$; demnach ist Rechteck $\zeta\xi \,.\, \xi\delta$ = Rechteck $\sigma\vartheta \,.\, \vartheta\varrho$. Nun ist $\zeta\xi > \sigma\vartheta$, mithin $\xi\delta < \vartheta\varrho$; folglich wird der Abstand zwischen diesen Kegelschnitten immer kleiner

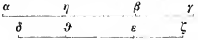
Ἔστω ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, ὡς δὲ ἡ βα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δθ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αγ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν αβ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν δε, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς αη κύβος μετὰ τοῦ λόγου ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ηβ κύβον ὅν τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον μετὰ τοῦ λόγου ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θε κύβον ὅν τὸ ἀπὸ δζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ γα πρὸς τὴν αβ οὕτως ἡ ζδ πρὸς τὴν δε, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ οὕτω τὸ ἀπὸ ζδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, κοινὸν [1]) ὕψος ἡ αβ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αγ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν αβ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς αβ κύβον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ζδ πρὸς τὸ ἀπὸ δε, κοινὸν ὕψος ἡ δε, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν δε, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δε κύβον. καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δε κύβον οὕτως ὅ τε ἀπὸ τῆς αη κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ηβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θε κύβον. [ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ηβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θε κύβον] [2]) οὕτω τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ηβ κύβον ὅν τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θε κύβον ὅν τὸ ἀπὸ δζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζε· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν αβ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν δε, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς αη κύβος μετὰ τοῦ λόγου ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ηβ κύβον ὅν τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θε κύβον ὅν τὸ ἀπὸ τῆς δζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζε.

Ἔστω τὸ α μετὰ τοῦ β ἴσον τῷ γ μετὰ τοῦ δ· ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ α τοῦ γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δ τοῦ β. Ἔστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ α τοῦ γ τὸ ε, τὸ α ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς γ, ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ β· τὰ α, β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς γ, ε, β.

[1]) So emendirt *Halley*, die Hdsch. haben κύβου.

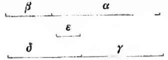
[2]) Einschaltung von *Commandin*.

Wenn $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$ und $\beta\alpha : \alpha\eta$ [*Command. CCIX.*] $= \varepsilon\delta : \delta\vartheta$, so verhält sich der Körper, dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\alpha\gamma$ und dessen Höhe $\alpha\beta$, zu dem Körper dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\delta\zeta$ und dessen Höhe $\delta\varepsilon$, wie der Cubus von $\alpha\eta$ + dem Körper der sich zum Cubus von $\eta\beta$ verhält wie Quadrat über $\alpha\gamma$ zu Quadrat über $\gamma\beta$, zu dem Cubus von $\delta\vartheta$ + dem Körper der sich zum Cubus von $\vartheta\varepsilon$ verhält wie Quadrat über $\delta\zeta$ zu Quadrat über $\zeta\varepsilon$.



Da $\gamma\alpha : \alpha\beta = \zeta\delta : \delta\varepsilon$, so ist auch Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\beta$ = Quadrat über $\zeta\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$; aber, wenn $\alpha\beta$ als gemeinschaftliche Höhe genommen wird, Quadrat über $\gamma\alpha$: Quadrat über $\alpha\beta$ = Körper dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\alpha\gamma$ und dessen Höhe $\alpha\beta$: Cubus von $\alpha\beta$, und, wenn $\delta\varepsilon$ die gemeinsame Höhe, Quadrat über $\zeta\delta$: Quadrat über $\delta\varepsilon$ = Körper dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\zeta\delta$ und dessen Höhe $\delta\varepsilon$: Cubus von $\delta\varepsilon$. Mithin stehen diese Körper in Proportion. Nun ist Cubus von $\alpha\beta$: Cubus von $\delta\varepsilon$ = Cubus von $\alpha\eta$: Cubus von $\delta\vartheta$ = Cubus von $\eta\beta$: Cubus von $\vartheta\varepsilon$; aber Cubus von $\eta\beta$: Cubus von $\vartheta\varepsilon$ = Körper der sich zu Cubus von $\eta\beta$ verhält wie Quadrat über $\alpha\gamma$ zu Quadrat über $\gamma\beta$: Körper der sich zu Cubus von $\vartheta\varepsilon$ verhält wie Quadrat über $\delta\zeta$ zu Quadrat über $\zeta\varepsilon$, folglich, da sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Verhältniss verhält, Körper dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\alpha\gamma$ und dessen Höhe $\alpha\beta$: Körper dessen Grundfläche gleich dem Quadrat über $\delta\zeta$ und dessen Höhe $\delta\varepsilon$ = Cubus von $\alpha\eta$ + dem Körper der sich zum Cubus von $\eta\beta$ verhält wie Quadrat über $\alpha\gamma$ zu Quadrat über $\gamma\beta$: Cubus von $\delta\vartheta$ + dem Körper der sich zu Cubus von $\vartheta\varepsilon$ verhält wie Quadrat über $\delta\zeta$ zu Quadrat über $\zeta\varepsilon$.

Ist $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, so ist α um [*Command. CCX.*] so viel grösser als γ als δ grösser als β ist.



Es sei $\varepsilon = \alpha - \gamma$, so ist $\alpha = \gamma + \varepsilon$. Nimmt man β hinzu, so ist $\alpha + \beta = \gamma + \varepsilon + \beta$; aber nach der Voraus-

ἀλλὰ τὰ α, β τοῖς γ, δ ἴσα ὑπόκειται· καὶ τὰ γ, δ ἄρα τοῖς γ, ε, β ἴσα. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ γ, λοιπὸν ἄρα τὸ δ ἴσον τοῖς β, ε· ὥστε τὸ δ τοῦ β ὑπερέχει τῷ ε. ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ α τοῦ γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δ τοῦ β. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ᾧ ὑπερέχει τὸ α τοῦ γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δ τοῦ β, ὅτι τὰ α, β ἴσα ἐστὶ τοῖς γ, δ.

Ἔστω δύο μεγέθη τὰ αβ, βγ· [1] *ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ βα τοῦ αγ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ αβ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ αγ τὸν αὐτόν, τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ γβ τὸν αὐτόν. Ἔστω γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ αβ λόγον τινὰ ἔχον τὸ δε, τὸ δὲ πρὸς τὸ αγ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ δζ. λοιπὸν ἄρα τὸ εζ πρὸς τὸ βγ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι τὸ εζ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ δε τοῦ δζ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ αβ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ αγ τὸν αὐτόν.*

Τὸ α τοῦ γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ δ τοῦ β· ὅτι τὰ α, β ἐλάσσονά ἐστι τῶν γ, δ. Ἔστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ α τοῦ γ τὸ ε, τὰ α, β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς γ, ε, β. ἐπεὶ δὲ τὸ α τοῦ γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ δ τοῦ β, τὸ δὲ α τοῦ γ ὑπερέχει τῷ ε, τὸ ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι τῆς τῶν δ, β ὑπεροχῆς. ὥστε τὰ ε, β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ γ, τὰ γ, ε, β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς γ, δ. ἀλλὰ τὰ γ, ε, β ἴσα ἐδείχθη τοῖς α, β· τὰ α, β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς γ, δ. ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρόφιον· καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως.

Τοῦ ϛ̅.

Ἔστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ αβγ, δεζ, ἀμβλείας ἔχοντα τὰς γ, ζ γωνίας, καὶ ἴσας τὰς α, δ ὀξείας· ὀρθαὶ ταῖς γβ, εζ ἤχθωσαν αἱ γη, ζθ· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βαη πρὸς

---

[1] Es scheint hier etwas zu fehlen; *Halley* hat so emendirt: *ἔστω δύο μεγέθη τὰ αβ, γβ· ὅτι ἐὰν ὑπερέχει τὸ αβ τοῦ αγ, ὑπερέχει καὶ ὁ λόγον ἔχον πρὸς τὸ αβ* etc.

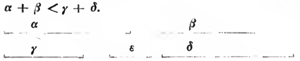
setzung ist $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, daher $\gamma + \delta = \gamma + \varepsilon + \beta$. Wird γ hinweggenommen, so bleibt $\delta = \varepsilon + \beta$, daher ist δ grösser als β um ε. Mithin um wie viel α grösser als γ ist, um so viel ist δ grösser als β. Auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, dass, wenn α grösser als γ um so viel als δ grösser als β, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ist.

Hat man zwei Grössen $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, so ist [*Command. CCXI.*] zu zeigen, dass, um wie viel $\alpha\beta$ die $\alpha\gamma$ übertrifft, um so viel auch die welche zu $\alpha\beta$ ein Verhältniss hat, diejenige übertrifft, welche zu $\alpha\gamma$ dasselbe Verhältniss hat, indem der Ueberschuss dasselbe Verhältniss zu $\gamma\beta$ hat.



Es habe $\delta\varepsilon$ irgend ein Verhältniss zu $\alpha\beta$, und es stehe $\delta\zeta$ zu $\alpha\gamma$ in demselben Verhältniss, so hat $\varepsilon\zeta$ eben dasselbe Verhältniss zu $\beta\gamma$. Es ist $\varepsilon\zeta$ der Ueberschuss, um welchen $\delta\varepsilon$ die $\delta\zeta$ übertrifft, d. h. um wie viel die welche zu $\alpha\beta$ ein Verhältniss hat, diejenige übertrifft, welche zu $\alpha\gamma$ dasselbe Verhältniss hat.

Wenn $\alpha - \gamma < \delta - \beta$, so ist [*Command. CCXII.*] $\alpha + \beta < \gamma + \delta$.



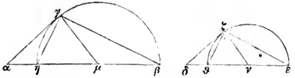
Es sei $\varepsilon = \alpha - \gamma$, so ist $\alpha + \beta = \gamma + \varepsilon + \beta$. Aber $\alpha - \gamma < \delta - \beta$ und $\varepsilon = \alpha - \gamma$, folglich $\varepsilon < \delta - \beta$ und $\varepsilon + \beta < \delta$. Nimmt man γ hinzu, so ist $\varepsilon + \beta + \gamma < \delta + \gamma$; aber es war $\gamma + \varepsilon + \beta = \alpha + \beta$, daher $\alpha + \beta < \delta + \gamma$. Auf ähnliche Weise wird der umgekehrte Satz bewiesen; auch der Fall, wenn $\alpha < \gamma$.

Zum sechsten Buch (der Kegelschnitte).

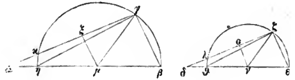
In den bei γ, ζ stumpfwinkligen [*Command. CCXIII.*] Dreiecken seien die spitzen Winkel α, δ einander gleich; es seien ferner auf $\gamma\beta$, $\varepsilon\zeta$ die Senkrechten $\gamma\eta$, $\zeta\vartheta$ errichtet und Rechteck

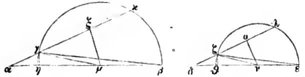
τὸ ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν εδθ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ· ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. Γεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ηβ, εθ ἡμικύκλια, ἐλεύσεται δὴ καὶ διὰ τῶν γ. ζ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω τὰ ηγβ, εζθ· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ αγ, δζ τῶν ἡμικυκλίων, ἢ γ'οὔ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερ`ν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα. ἐὰν γὰρ λάβω τὰ κέντρα τὰ μ, ν, καὶ ἐπιζεύξω τὰς μγ, νζ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ μγα, νζδ γωνίαι, καὶ εἰσὶν αἱ α, δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ αμγ ἄρα τῇ ὑπὸ δνζ 'γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ β ἄρα γωνία τῇ ε ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ α τῇ δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα. 'Αλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτω τὰ ἡμικύκλια κατά τινα σημεῖα τὰ κ, λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ μξ, νο· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν κξ τῇ ξγ, ἡ δὲ λο τῇ οζ. ὅμοιον δὲ τὸ αμξ τῷ δνο τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ξα πρὸς αμ οὕτως ἡ δο πρὸς δν. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ἀπὸ αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εδθ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ καγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τουτέστιν ὡς ἡ κα πρὸς αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ λδζ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, τουτέστιν ἡ λδ πρὸς δζ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ξα πρὸς αγ οὕτως ἡ οδ πρὸς δζ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ξα πρὸς αμ οὕτως ἐστὶν ἡ οδ πρὸς δν, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αμ οὕτως ἡ ζδ πρὸς δν, καὶ παρὰ ἴσας γωνίας τὰς α, δ ἀνάλογόν εἰσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν αμγ τῇ ὑπὸ τῶν δνζ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ε. ἀλλὰ καὶ ἡ α τῇ δ, καθ' ὑπόθεσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ.

$\beta\alpha \,.\, \alpha\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\vartheta$: Quadrat über $\delta\zeta$, so ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma \sim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$.



Beschreibt man über $\eta\beta$, $\varepsilon\vartheta$ Halbkreise, die durch γ, ζ gehen, so sind $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ entweder Tangenten der Halbkreise oder nicht. Im ersten Falle sind die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ offenbar ähnlich; denn sind μ, ν die Mittelpunkte und zieht man $\mu\gamma$, $\nu\zeta$, so sind $\angle\ \mu\gamma\alpha$, $\nu\zeta\delta$ Rechte, und da $\angle\ \alpha = \angle\ \delta$, so ist auch $\angle\ \alpha\mu\gamma = \delta\nu\zeta$, folglich auch ihre Hälften : $\angle\ \alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta$, mithin $\triangle\alpha\beta\gamma \sim \triangle\delta\varepsilon\zeta$.





Sind aber die Linien $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ keine Tangenten, sondern schneiden die Halbkreise in den Punkten $\varkappa$, λ, so fälle man die Senkrechten $\mu\xi$, νo. Alsdann ist $\varkappa\xi = \xi\gamma$, $\lambda o = o\zeta$, folglich $\triangle\alpha\mu\xi \sim \triangle\delta\nu o$, und $\xi\alpha : \alpha\mu = \delta o : \delta\nu$. Da nun Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\vartheta$: Quadrat über $\delta\zeta$, so ist auch Rechteck $\varkappa\alpha \,.\, \alpha\gamma$: Quadrat über $\alpha\gamma$ (d. h. $\varkappa\alpha : \alpha\gamma$) = Rechteck $\lambda\delta \,.\, \delta\zeta$: Quadrat über $\delta\zeta$ (d. h. $\lambda\delta : \delta\zeta$); daher auch $\xi\alpha : \alpha\gamma = o\delta : \delta\zeta$. Aber es war $\xi\alpha : \alpha\mu = o\delta : \delta\nu$, mithin $\alpha\gamma : \alpha\mu = \delta\zeta : \delta\nu$, folglich sind die gleiche Winkel einschliessenden Seiten proportional, mithin $\angle\ \alpha\mu\gamma = \angle\ \delta\nu\zeta$, daher auch ihre Hälften : $\angle\ \beta = \angle\ \varepsilon$, folglich $\triangle\ \alpha\beta\gamma \sim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$.

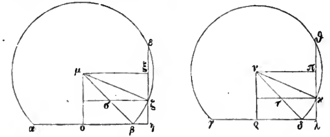
Συμφανὲς δὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτῷ, τοῦ ὄντος ὁμοίου τοῦ αβγ τῷ δεζ, καὶ ὀρθῶν τῶν ὑπὸ βγη, εζθ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ἀπὸ αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εδθ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ· ἔστι γάρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς μὲν βα πρὸς αγ οὕτως ἡ εδ πρὸς δζ, ὡς δὲ ἡ ηα πρὸς αγ οὕτως ἡ θδ πρὸς δζ· καὶ ὁ συνημμένος.

Ἔστω δύο ὅμοια τμήματα μείζονα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν αβ, γδ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ εζη, θκλ, ἔστω δὲ ὡς ἡ εη πρὸς ηζ οὕτως ἡ θλ πρὸς λκ· δεικτέον ὅτι ὁμοία ἐστὶν ἡ βζ περιφέρεια τῇ δκ περεφερείᾳ. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τὰ μ, ν, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ μξ, μο, νπ, νρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ μβ, νδ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ομβ γωνία τῇ ὑπὸ ρνδ γωνίᾳ, ἴσαι γάρ εἰσι ταῖς ἐν τοῖς τμήμασι κατὰ μίαν, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ο, ρ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ μβο γωνία τῇ ὑπὸ νδρ γωνίᾳ. ἤχθωσαν ταῖς αβ, γδ παράλληλοι αἱ ζσ, κτ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ μζ, νκ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ μσζ γωνία τῇ ὑπὸ ντκ γωνίᾳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ εη πρὸς ηζ οὕτως ἡ θλ πρὸς λκ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ξη πρὸς ηζ οὕτως ἐστὶν ἡ πλ πρὸς λκ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ηξ πρὸς ξζ, τουτέστιν ἡ μβ πρὸς μσ, τουτέστιν ὡς ἡ ζμ πρὸς μσ, οὕτως ἡ λπ πρὸς κπ, τουτέστιν ἡ δν πρὸς ντ. καί εἰσιν αἱ μὲν ὑπὸ μσζ, ντκ ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ μζσ, νκτ ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ σμζ γωνία τῇ ὑπὸ τνκ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ βζ περιφέρεια τῇ δκ περιφερείᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς γ, ζ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ αη, δθ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ βαη, εδθ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βγη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ ζδ· ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. Γεγράφθω γὰρ περὶ τὰ αβη, δεθ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ βηα, δθε· ὅμοια ἄρα ἐστίν. ἤτοι ἐφάπτονται αἱ αγ, δζ τῶν τμημάτων, ἢ οὔ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ βγη τῷ ἀπὸ αγ, τουτέστιν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ αη τὴν ακ, τῷ ὑπὸ τῶν

Der umgekehrte Satz ist leicht darzuthun: Ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$ und $\angle\ \beta\gamma\eta = \angle\ \varepsilon\zeta\vartheta = R$, so ist zu beweisen, dass Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\vartheta$: Quadrat über $\delta\zeta$. Da $\beta\alpha : \alpha\gamma = \varepsilon\delta : \delta\zeta$ und $\eta\alpha : \alpha\gamma = \vartheta\delta : \delta\zeta$, so ergiebt sich durch Zusammensetzung der Proportionen sofort die Behauptung.

Es seien über den Sehnen $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ [*Command.* CCXIV.] zwei ähnliche Kreisabschnitte, grösser als der Halbkreis; zieht man darin die Senkrechten $\varepsilon\zeta\eta$, $\vartheta\varkappa\lambda$ und ist $\varepsilon\eta : \eta\zeta = \vartheta\lambda : \lambda\varkappa$, so ist Bogen $\beta\zeta$ dem Bogen $\delta\varkappa$ ähnlich.



Fällt man von den Mittelpunkten μ, ν die Senkrechten $\mu\xi$, μo; $\nu\pi$, $\nu\varrho$, und zieht die Geraden $\mu\beta$, $\nu\delta$, so ist $\angle\ o\mu\beta = \angle\ \varrho\nu\delta$, und da $\angle\ o = \angle\ \varrho = R$, so ist $\angle\ \mu\beta o = \angle\ \nu\delta\varrho$. Zieht man nun zu $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ die Parallelen $\zeta\sigma$, $\varkappa\tau$, und die Geraden $\mu\zeta$, $\nu\varkappa$, so ist $\angle\ \mu\sigma\zeta = \angle\ \nu\tau\varkappa$. Da nun $\varepsilon\eta : \eta\zeta = \vartheta\lambda : \lambda\varkappa$, so ist auch $\xi\eta : \eta\zeta = \pi\lambda : \lambda\varkappa$, mithin $\eta\xi : \xi\zeta$ (d. h. $\mu\beta : \mu\sigma$) $= \pi\lambda : \pi\varkappa$ (d. h. $\delta\nu : \nu\tau$). Da aber $\angle\ \mu\sigma\zeta = \angle\ \nu\tau\varkappa$, und $\angle\ \mu\zeta\sigma$, $\nu\varkappa\tau$ spitze Winkel sind, so ist auch $\angle\ \sigma\mu\zeta = \angle\ \tau\nu\varkappa$, folglich Bogen $\beta\zeta$ dem Bogen $\delta\varkappa$ ähnlich.

Zieht man in den bei γ, ζ recht- [*Command.* CCXV.] winkligen Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ unter den gleichen Winkeln $\beta\alpha\eta$, $\varepsilon\delta\vartheta$ die Linien $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$, und ist Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$, so ist $\triangle\ \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$.

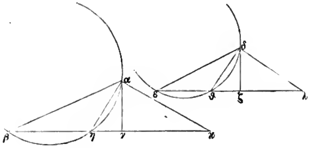
Werden um die Dreiecke $\alpha\beta\eta$, $\delta\varepsilon\vartheta$ die Kreissegmente $\beta\eta\alpha$, $\delta\vartheta\varepsilon$ beschrieben, so sind sie ähnlich. Nun sind die Linien $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ entweder Tangenten der Kreisbogen, oder nicht. Im ersten Falle ist Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ = Quadrat über $\alpha\gamma$, oder wenn $\alpha\varkappa \perp \alpha\eta$, = Rechteck $\eta\gamma \,.\, \gamma\varkappa$, und Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$ = Quadrat über $\delta\zeta$ oder

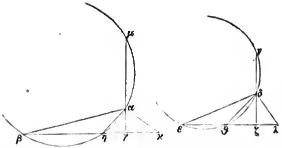
ηγκ˙ τὸ δὲ ὑπὸ τῶν εζθ τῷ ἀπὸ δζ, τουτέστιν, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω τὴν δλ τῇ δθ, τῷ ὑπὸ θζλ˙ ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βγ τῇ γκ, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ˙ καὶ ὀρθαὶ αἱ γ, ζ˙ διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ βακ γωνία τῆς ὑπὸ βαγ γωνίας, ἡ δὲ ὑπὸ εδλ γωνία τῆς ὑπὸ εδζ. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ὑπὸ βακ, εδλ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ εδθ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ηακ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ θδλ˙ καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ ὀρθαὶ αἱ γ, ζ˙ ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. ὅπερ: —

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν αἱ αγ, δζ, ἀλλὰ τεμνέτωσαν κατὰ τὰ μ, ν σημεῖα. ἔστιν ὡς ἡ μγ πρὸς γα οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δζν πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, τουτέστι ἡ νζ πρὸς ζδ. καὶ ἔστιν ὅμοια μείζονα τμήματα τὰ βαη, εδθ˙ ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ αη περιφέρεια τῇ δθ περιφερείᾳ˙ ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ β γωνία τῇ ε. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ.

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς γ, ζ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ αη, δθ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ βαη, εδθ˙ ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ἀπὸ αγ οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ˙ ὅτι ὅμοιον τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. Ἤχθωσαν ταῖς αη, δθ ὀρθαὶ αἱ ακ, δλ˙ ἴσον

wenn $\delta\lambda \perp \delta\vartheta$, $=$ Rechteck $\vartheta\zeta \,.\, \zeta\lambda$, mithin $\beta\gamma = \gamma\varkappa$, $\varepsilon\zeta = \zeta\lambda$. Da nun $\angle \gamma = \angle \zeta = R$, so ist $\angle \beta\alpha\varkappa = 2 \angle \beta\alpha\gamma$, $\angle \varepsilon\delta\lambda = 2 \angle \varepsilon\delta\zeta$; aber $\angle \beta\alpha\varkappa = \angle \varepsilon\delta\lambda$, weil $\angle \beta\alpha\eta = \angle \varepsilon\delta\vartheta$ und $\angle \eta\alpha\varkappa = \angle \vartheta\delta\lambda = R$, folglich $\angle \beta\alpha\gamma = \angle \varepsilon\delta\zeta$, mithin, da $\angle \gamma = \angle \zeta = R$, $\triangle \alpha\beta\gamma \sim \triangle \varepsilon\delta\zeta$, was zu beweisen war.





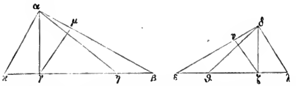
Berühren aber die Linien $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ die Kreisbogen nicht, sondern schneiden sie in den Punkten μ, ν, so ist $\mu\gamma : \gamma\alpha =$ Rechteck $\delta\zeta \,.\, \zeta\nu$: Quadrat über $\delta\zeta$, d. h. $= \nu\zeta : \zeta\delta$. Nun sind die Segmente $\beta\alpha\eta$, $\varepsilon\delta\vartheta$ ähnlich und grösser als der Halbkreis, folglich Bogen $\alpha\eta$ dem Bogen $\delta\vartheta$ ähnlich, mithin $\angle \beta = \angle \varepsilon$, und $\triangle \alpha\beta\gamma \sim \triangle \delta\varepsilon\zeta$.

Ein anderer Beweis desselben Satzes. Zieht man in den bei γ, ζ rechtwinkligen Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ unter den gleichen Winkeln $\beta\alpha\eta$, $\varepsilon\delta\vartheta$ die Linien $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$, und ist Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$: Quadrat über $\alpha\gamma =$ Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$: Quadrat über $\zeta\delta$, so ist $\triangle \alpha\beta\gamma$ $\triangle \delta\varepsilon\zeta$.

ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ αγ τῷ ὑπὸ ηγκ, τὸ δὲ ἀπὸ δζ τῷ ὑπὸ θζλ. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ βγη πρὸς τὸ ὑπὸ ηγκ, τουτέστιν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γκ, οὕτω τὸ ὑπὸ εζθ πρὸς τὸ ὑπὸ θζλ, τουτέστιν ἡ εζ πρὸς ζλ. ἤχθωσαν ταῖς ακ, δλ παράλληλοι αἱ γμ ζν, καὶ ὡς ἄρα ἡ βμ πρὸς μα οὕτως ἡ εν πρὸς νδ· καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς γ, ζ σημείοις, ἴσαι δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν, ἐπεὶ καὶ [1]) αἱ ὑπὸ βακ, εδλ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ.

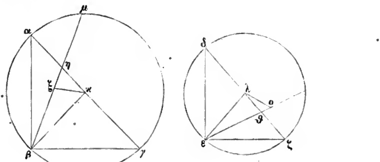
Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς β, ε σημείοις γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ βη, εθ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ αηβ, δθε· ἔστω τε ὡς τὸ ἀπὸ τῶν αηγ πρὸς τὸ ἀπὸ ηβ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θε· δεικτέον ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ κ, λ. φανερὸν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν η, θ σημείων εἰσίν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ μὲν κ μεταξὺ τῶν γ, η σημείων, τὸ δὲ λ μεταξὺ τῶν δ, θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ βη, εθ ἐπὶ τὰ μ, ν σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὴν μβ κάθετος ἤχθω ἡ κξ· πεσεῖται ἄρα μεταξὺ τῶν η, β, ἀμβλεῖά τε γίνεται ἡ ὑπὸ αηβ γωνία καί ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ δθε· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δθε γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ δθν, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν εν κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξὺ τῶν θ, ν. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ λο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ νο τῇ οε. ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ νο τῆς θε, πολλῷ ἄρα ἡ νθ τῆς θε ἐστὶ μείζων, καὶ τὸ ὑπὸ νθε, τουτέστι τὸ δθζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ εθ τετραγώνου, καί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ δθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θε οὕτω τὸ ὑπὸ αηγ πρὸς τὸ ἀπὸ ηβ· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ἔστι γὰρ καὶ ἔλασσον, ἐπειδήπερ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ μη τῆς ηβ καὶ τὸ ὑπὸ μηβ τοῦ ἀπὸ ηβ· οὐκ ἄρα τοῦ κ κέντρου ὄντος μεταξὺ τῶν η, γ, τὸ λ ἔσται μεταξὺ τῶν δ, θ. ἔστω οὖν μεταξὺ τῶν θ, ζ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἤχθω ἡ λο κάθετος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ αηγ, τουτέστι τὸ ὑπὸ μηβ, πρὸς τὸ ἀπὸ ηβ, τουτέστιν ὡς ἡ μη πρὸς ηβ, οὕτω τὸ ὑπὸ

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. haben καὶ τῶν αἱ.



Errichtet man auf $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ die Senkrechten $\alpha\varkappa$, $\delta\lambda$, so ist Quadrat über $\alpha\gamma$ = Rechteck $\eta\gamma \, . \, \gamma\varkappa$, Quadrat über $\delta\zeta$ = Rechteck $\vartheta\zeta \, . \, \zeta\lambda$; daher Rechteck $\beta\gamma \, . \, \gamma\eta$: Rechteck $\eta\gamma \, . \, \gamma\varkappa$ (d. h. $\beta\gamma : \gamma\varkappa$) = Rechteck $\varepsilon\zeta \, . \, \zeta\vartheta$: Rechteck $\vartheta\zeta \, . \, \zeta\lambda$ (d. h. $\varepsilon\zeta : \zeta\lambda$), mithin, wenn zu $\alpha\varkappa$, $\delta\lambda$ die Parallelen $\gamma\mu$, $\zeta\nu$ gezogen werden, $\beta\mu : \mu\alpha = \varepsilon\nu : \nu\delta$. Da aber $\angle \gamma = \angle \zeta = \varkappa$, und $\angle \mu = \angle \nu$, weil $\angle \beta\alpha\varkappa = \angle \varepsilon\delta\lambda$, so ist nach dem Vorhergehenden $\triangle\, \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\, \delta\varepsilon\zeta$.

Werden in den bei β, ε recht- [*Command. CCXVI.*] winkligen Dreiecken unter den gleichen Winkeln $\alpha\eta\beta$, $\delta\vartheta\varepsilon$ die Linien $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$ gezogen, und ist Rechteck $\alpha\eta \, . \, \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\beta$ = Rechteck $\delta\vartheta \, . \, \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\varepsilon$, so ist zu zeigen dass $\triangle\, \alpha\beta\gamma \backsim \triangle\, \delta\varepsilon\zeta$.



Werden um die Dreiecke Kreise beschrieben, deren Mittelpunkte $\varkappa$, λ sind, so liegen diese offenbar auf derselben Seite von η und ϑ. Wenn es möglich wäre, so liege $\varkappa$ zwischen γ und η, λ zwischen δ und ϑ. Man verlängere nun $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$ bis μ, ν, und fälle von $\varkappa$ auf $\mu\beta$ die Senkrechte $\varkappa\xi$; fällt diese zwischen η, β, so ist $\angle\, \alpha\eta\beta$ ein stumpfer und $\angle\, \delta\vartheta\varepsilon$ gleich; mithin ist auch $\angle\, \delta\vartheta\varepsilon$ ein

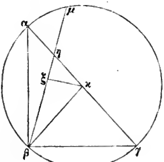
δθζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ νθε πρὸς τὸ ἀπὸ θε, [τουτέστι ἡ νθ πρὸς θε][1]. καὶ τέμνονται αἱ βμ, νε δίχα τοῖς ξ, ο· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βξ πρὸς ξη οὕτως ἡ εο πρὸς οθ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ηξ πρὸς ξκ οὕτως ἡ θο πρὸς τὴν ολ, ὀρθαὶ μὲν γὰρ αἱ ξ, ο, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς η, θ σημείοις γωνίαι· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βξ πρὸς ξκ οὕτως ἡ εο πρὸς ολ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν βκξ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ελο γωνίᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ξκη γωνία τῇ ὑπὸ ολθ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βκη ὅλῃ τῇ ὑπὸ ελο ἐστὶν ἴση, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν αγβ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν δζε. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ β, ε γωνίαι· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ.

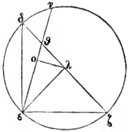
Φανερὸν δὲ καὶ τούτῳ ἀντίστροφον, τὸ, ἐὰν ᾖ ὅμοιον τὸ μὲν αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ, τὸ δὲ ηβγ τῷ θεζ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ αηγ πρὸς τὸ ἀπὸ ηβ οὕτω τὸ ὑπὸ δθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἴσας ἔχοντα τὰς α, δ γωνίας, μὴ ὀρθὰς δὲ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ αη, δθ· ἔστω τε τὸ ὑπὸ τῶν βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αη οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν

[1]) Einschaltung von *Commandin.*

stumpfer und $\angle \delta\vartheta\nu$ ein spitzer; daher wird die von λ auf $\varepsilon\nu$ gefällte Senkrechte zwischen ϑ, ν fallen. Alsdann ist $\nu o = o\varepsilon$, daher $\nu o > \vartheta\varepsilon$ und $\nu\vartheta$ noch $> \vartheta\varepsilon$, mithin Rechteck $\nu\vartheta . \vartheta\varepsilon$ d. h. Rechteck $\delta\vartheta . \vartheta\zeta >$ Quadrat über $\vartheta\varepsilon$, was der Voraussetzung dass Rechteck $\delta\vartheta . \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\eta . \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\beta$ widerspricht, denn es ist kleiner, da $\mu\eta < \eta\beta$ und Rechteck $\mu\eta . \eta\beta <$ Quadrat über $\eta\beta$. Liegt also der Mittelpunkt $\varkappa$ zwischen η, γ, so wird der Mittelpunkt λ nicht zwischen δ, ϑ sein. Er möge nun zwischen ϑ, ζ liegen. Man fälle die Senkrechte λo. Da nun Rechteck $\alpha\eta . \eta\gamma$ d. h. Rechteck $\mu\eta . \eta\beta$: Quadrat über $\eta\beta$ (d. h. $\mu\eta : \eta\beta$) = Rechteck $\delta\vartheta . \vartheta\zeta$ d. h. Rechteck $\nu\vartheta . \vartheta\varepsilon$: Quadrat über $\vartheta\varepsilon$, und die Linien $\beta\mu$, $\nu\varepsilon$ in ξ und o halbirt werden, so ist $\beta\xi : \xi\eta = \varepsilon o : o\vartheta$; aber $\eta\xi : \xi\varkappa = \vartheta o : o\lambda$, da $\angle \xi = \angle o = R$ und $\angle \eta = \angle \vartheta$, folglich $\beta\xi : \xi\varkappa = \varepsilon o : o\lambda$; nun sind aber auch die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, mithin $\angle \beta\varkappa\xi = \angle \varepsilon\lambda o$. Da aber $\angle \xi\varkappa\eta = \angle o\lambda\vartheta$, so ist $\angle \beta\varkappa\eta = \angle \varepsilon\lambda\vartheta$, mithin auch ihre Hälften $\angle \alpha\gamma\beta = \angle \delta\zeta\varepsilon$, folglich, da $\angle \beta = \angle \varepsilon = R$, $\triangle \alpha\beta\gamma \sim \triangle \delta\varepsilon\zeta$.





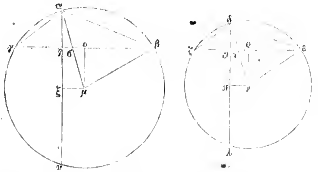
Der umgekehrte Satz ist leicht zu beweisen. Ist nämlich $\triangle \alpha\beta\gamma \sim \triangle \delta\varepsilon\zeta$ und auch $\triangle \eta\beta\gamma \sim \triangle \vartheta\varepsilon\zeta$, so ist Rechteck $\alpha\eta . \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\beta$ = Rechteck $\nu\vartheta . \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\varepsilon$. Dies folgt sofort aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Haben die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ bei [*Command CCXVII.*] α, δ gleiche Winkel, die jedoch nicht rechte sind, und werden die Senkrechten $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ gefällt; ist ferner Rechteck $\beta\eta . \eta\gamma$: Quadrat

εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δθ, καὶ ἔστω τῶν βγ, εζ εὐθειῶν μείζονα τμήματα τὰ βη, εθ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν αβη τρίγωνον τῷ δεθ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ. Περιγεγράφθωσαν κύκλοι καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ αη, δθ ἐπὶ τὰ κ, λ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ μ, ν, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰς ακ, βγ, δλ, εζ κάθετοι αἱ μξ, μο, νπ, νρ. ἔστι δὴ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς προγεγραμμένοις ὡς ἡ κη πρὸς ηα οὕτως ἡ λθ πρὸς θδ, ὥστε καὶ ὡς ἡ αξ πρὸς ξη οὕτως ἡ δπ πρὸς πθ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ αμ, δν. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αξ πρὸς ξη οὕτως ἡ αμ πρὸς μσ, ὡς δὲ ἡ δπ πρὸς πθ οὕτως ἡ δν πρὸς ντ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αμ πρὸς μσ οὕτως ἡ δν πρὸς ντ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ βμ, εν. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ βαγ τμῆμα τῷ εδζ τμήματι, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ βκγ τμῆμα λοιπῷ τῷ ελζ τμήματι ὅμοιόν ἐστιν· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἴσαι εἰσίν, καί εἰσιν αὐτῶν κατὰ μίαν ἴσαι· αἱ ὑπὸ τῶν βμο, ενρ ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἐπὶ τῆς πρώτης δυάδος τῶν πτώσεων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐκ παρακειμένου δηλονότι ἐστὶν ὡς ἴση ἡ ὑπὸ τῶν βμο γωνία τῇ ὑπὸ ενρ, καὶ γὰρ αἱ ἐν τοῖς βαγ, εδζ τμήμασι γωνίαι. γίνεται οὖν ὡς ἡ βμ πρὸς μο, τουτέστιν ὡς ἡ αμ πρὸς μο, οὕτως ἡ εν πρὸς νρ, τουτέστιν ἡ δν πρὸς νρ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ αμ πρὸς μσ οὕτως ἡ δν πρὸς ντ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μο πρὸς μσ οὕτως ἡ ρν πρὸς ντ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ ο, ρ γωνίαι, ὀξεῖα δὲ ἑκατέρα τῶν σ, τ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ομσ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ρντ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν βμο τῇ ὑπὸ ενρ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν βμσ ἄρα τῇ ὑπὸ τῶν εντ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ γ γωνία τῇ ζ ἐστὶν ἴση. ὅμοια ἄρα ἐστὶ πάντα πᾶσι.

Δύναται δὲ καί, τῆς μιᾶς γωνίας ἢ τῶν ἀμβλειῶν ἢ τῶν ὀξειῶν προγεγραμμένης τῆς δείξεως, τὸ λοιπὸν ἀποδοῦναι οὕτως. ὑποκείσθω γὰρ ἀποδεδειχθέναι, οὐσῶν ἴσων ἀμβλειῶν τῶν γωνιῶν τὸ πρότερον, κατὰ τὸν προγεγραμμένον τρόπον, καὶ ἔστω, δυοῖν ὀξειῶν ἴσων οὐσῶν τῶν ὑπὸ βαγ, εδζ, δεῖξαι ὅτι ὅμοια τὰ τρίγωνα. καὶ πάλιν περιγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι καὶ ἐκβεβλημμένων τῶν αη, δθ ἐπὶ τὰ κ, λ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ βκ, κγ, ελ, λζ· ἴσαι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ

über $\alpha\eta$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\zeta$: Quadrat über $\delta\vartheta$ und sind $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$ die grösseren Abschnitte der Linien $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, so ist $\triangle\, \alpha\beta\eta \sim \triangle\, \delta\varepsilon\vartheta$, und der Rest dem Reste ähnlich.



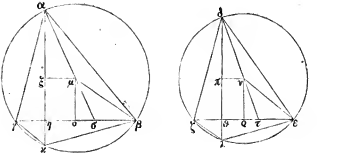
Beschreibt man um die Dreiecke Kreise, verlängert die Senkrechten $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ bis $\varkappa$, λ und fällt von den Mittelpunkten μ, ν auf $\alpha\varkappa$ $\beta\gamma$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\zeta$ die Senkrechten $\mu\xi$, μo, $\nu\pi$, $\nu\varrho$, so ist ebenso wie in dem Vorhergehenden $\varkappa\eta : \eta\alpha = \lambda\vartheta : \vartheta\delta$, und $\alpha\xi : \xi\eta = \delta\pi : \pi\vartheta$. Zieht man $\alpha\mu$, $\delta\nu$, so ist $\alpha\xi : \xi\eta = \alpha\mu : \mu\sigma$, $\delta\pi : \pi\vartheta = \delta\nu : \nu\tau$, mithin $\alpha\mu : \mu\sigma = \delta\nu : \nu\tau$. Ferner ziehe man $\beta\mu$, $\varepsilon\nu$; da Segment $\beta\alpha\gamma \sim$ Segment $\varepsilon\delta\zeta$ und mithin Segment $\beta\varkappa\gamma$ Segment $\varepsilon\delta\zeta$, so sind auch die darin enthaltenen Winkel gleich, mithin auch $\angle\, \beta\mu o = \angle\, \varepsilon\nu\varrho$ im ersten Falle. Im zweiten Falle ist aber offenbar $\angle\, \beta\mu o = \angle\, \varepsilon\nu\varrho$, da die Segmente $\beta\alpha\gamma$, $\varepsilon\delta\zeta$ einander gleich sind. Daher ist $\beta\mu : \mu o$ (oder $\alpha\mu : \mu o$) $= \varepsilon\nu$ (oder $\delta\nu$): $\nu\varrho$, aber $\alpha\mu : \mu\sigma = \delta\nu : \nu\tau$, mithin $\mu o : \mu\sigma = \varrho\nu : \nu\tau$. Nun ist $\angle\, o = \angle\, \varrho = R$, daher beide Winkel σ, τ spitze, folglich $\angle\, o\mu\sigma = \angle\, \varrho\nu\tau$; aber $\angle\, \beta\mu o = \angle\, \varepsilon\nu\varrho$, folglich $\angle\, \beta\mu\sigma = \angle\, \varepsilon\nu\tau$, mithin $\angle\, \gamma = \angle\, \zeta$. daher $\triangle\, \alpha\beta\gamma \sim \triangle\, \delta\varepsilon\zeta$.

Nachdem so der Nachweis, mag der eine Winkel ein stumpfer oder ein spitzer sein, geführt ist, kann übrigens der Satz auf folgende Weise dargethan werden. Angenommen dass der Nachweis geführt sei für den Fall, dass die stumpfen Winkel gleich seien, ist zu zeigen, dass $\triangle\, \alpha\beta\gamma \sim \triangle\, \varepsilon\delta\zeta$, wenn zwei spitze Winkel gleich sind. Beschreibt man um die Dreiecke Kreise, verlängert $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ bis $\varkappa$, λ und zieht $\beta\varkappa$, $\varkappa\gamma$, $\varepsilon\lambda$, $\lambda\zeta$, so sind die stumpfen Winkel $\beta\varkappa\gamma$, $\varepsilon\lambda\zeta$ einander gleich. Da nun Rechteck $\beta\eta.\eta\gamma$

βκγ, εδζ γωνίαι ἀμβλεῖαι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ βηγ, τουτέστι τὸ ὑπὸ αηκ, πρὸς τὸ ἀπὸ αη, τουτέστιν ἡ κη πρὸς κα, οὕτω τὸ ὑπὸ εθζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δθλ, πρὸς τὸ ἀπὸ δθ, τουτέστιν ἡ λθ πρὸς θδ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ ηκ οὕτω τὸ ἀπὸ δθ πρὸς τὸ ἀπὸ θλ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτω τὸ ὑπὸ εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ δθ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ βηγ πρὸς τὸ ἀπὸ ηκ οὕτω τὸ ὑπὸ εθζ πρὸς τὸ ἀπὸ θλ. καί εἰσιν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν βκγ, ελζ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ κη, λθ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ βκη τρίγωνον τῷ ελθ τριγώνῳ, τὸ δὲ γκη τῷ ζλθ, ὥστε καὶ τὸ μὲν αβη τρίγωνον τῷ δεθ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ αηγ τῷ δζθ, ὥστε καὶ ὅλον τὸ αβγ ὅλῳ τῷ δεζ ἐστὶν ὅμοιον.

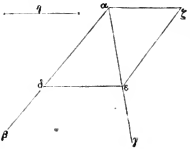
Θέσει δεδομένων τῶν αβ, αη, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν δε, καὶ ποιεῖν δοθεῖσαν τὴν δε. Γεγονέτω, καὶ διὰ τοῦ α τῇ δε παράλληλος ἤχθω ἡ αζ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστί, καί ἐστι δοθὲν τὸ α· θέσει ἄρα ἐστίν ἡ αζ. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ αζ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ δε. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ δε· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αζ. ἀλλὰ καὶ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ζ. διὰ δὴ δεδομένου τοῦ ζ παρὰ θέσει τῇ αβ ἦκται ἡ ζε· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ζε, θέσει δὲ καὶ ἡ αγ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ δε· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ δε. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δεδομέναι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ η, παρ' ἣν δεῖ ἄγεσθαι [1]), ἔστω ἡ αζ. καὶ τῇ η ἴση κείσθω ἡ αζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ ζ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ζε, διὰ δὲ τοῦ ε τῇ αζ παράλληλος ἤχθω ἡ εδ. λέγω ὅτι ἡ δε ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δε τῇ αζ. ἀλλὰ ἡ αζ τῇ η ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ δοθείσῃ,

[1]) Die Hdsch. haben παρ' ἣν δὲ ἄγονται.



(oder Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\varkappa$) : Quadrat über $\alpha\eta$ (d. h. $\eta\varkappa : \eta\alpha$) $=$ Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \vartheta\zeta$ (oder Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\lambda$) : Quadrat über $\delta\vartheta$ (d. h. $\vartheta\lambda : \delta\vartheta$), so ist auch Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\eta\varkappa =$ Quadrat über $\delta\vartheta$: Quadrat über $\vartheta\lambda$; aber Rechteck $\beta\eta \,.\, \eta\gamma$: Quadrat über $\alpha\eta =$ Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \vartheta\zeta$: Quadrat über $\delta\vartheta$, mithin Rechteck $\beta\eta \,.\, \eta\gamma$: Quadrat über $\eta\varkappa =$ Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \vartheta\zeta$: Quadrat über $\vartheta\lambda$. Es sind aber die Winkel $\beta\varkappa\gamma$, $\varepsilon\lambda\zeta$ stumpfe und $\varkappa\eta$, $\lambda\vartheta$ stehen senkrecht, daher ist nach dem Vorausgegangenen $\triangle\, \beta\varkappa\eta \sim \triangle\, \varepsilon\lambda\vartheta$ und $\triangle\, \gamma\varkappa\eta \sim \triangle\, \zeta\lambda\vartheta$, folglich $\triangle\, \alpha\beta\eta \sim \triangle\, \delta\varepsilon\vartheta$ und $\triangle\, \alpha\eta\gamma \sim \triangle\, \delta\vartheta\zeta$, mithin auch $\triangle\, \alpha\beta\gamma \sim \triangle\, \delta\varepsilon\zeta$.

Es sind die Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ der [*Command. CCXVIII.*] Lage nach gegeben; es soll die Gerade $\delta\varepsilon$ gezogen werden, die einer der Lage nach gegebenen Geraden parallel und ihr an Grösse gleich ist.



Angenommen, es sei geschehen, und es werde durch α zu $\delta\varepsilon$ die Parallele $\alpha\zeta$ gezogen, so ist $\alpha\zeta$ der der Lage nach gegebenen Geraden parallel. Nun ist der Punkt α gegeben, folglich auch $\alpha\zeta$ der Lage nach gegeben. Zieht man durch ε zu $\alpha\beta$ die Parallele $\varepsilon\zeta$, so ist $\alpha\zeta = \delta\varepsilon$. Aber $\delta\varepsilon$ ist gegeben

καὶ ἡ δε ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ η τῇ δοθείσῃ, ἡ δε ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερὸν ὅτι μόνη. ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τῷ [1]) α τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων.

Ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ αβγ, εβζ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς βγ, [καὶ] ἐφεστάτω αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ ὀρθά [2]). λέγω ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ αβ, βε, βγ εὐθεῖαι. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β τῇ βγ καὶ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ηβ, καὶ τῷ εβζ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔσται ὀρθὴ ἡ ηβ, ὥστε καὶ τῇ βε ἐστὶν ὀρθή. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ αβ. ἔστι δὲ καὶ τῇ βγ εὐθείᾳ ἡ βη ὀρθή· ἡ βη ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς αβ, βε, βγ ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ἁφῆς τῆς β ἐφέστηκεν. διὰ ἄρα τὰ στοιχεῖα [3]) ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ αἱ αβ, βε, βγ εὐθεῖαι.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς α, δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ αη, δθ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ αηβ, δθε· ἔστω δὲ ὡς ἡ βη πρὸς τὴν ηγ οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν θζ· ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν αβη τρίγωνον τῷ δεθ, τὸ δὲ αηγ τῷ δθζ, καὶ ἔτι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. Ἐκβεβλήσθω ἡ αη, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ δθ πρὸς θε οὕτως ἡ γη

---

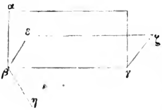
[1]) So *Halley*; die Hdsch. haben τοῦ.

[2]) Die Hdsch. haben ὀρθῷ.

[3]) Die Hdsch. haben τὸ στοιχεῖον.

folglich auch $\alpha\zeta$. Nun ist sie auch der Lage nach gegeben, so wie auch der Punkt α, daher ist auch der Punkt ζ gegeben. Durch diesen gegebenen Punkt ζ ist zu der der Lage nach gegebenen $\alpha\beta$ die Parallele $\zeta\varepsilon$ gezogen, folglich ist auch $\zeta\varepsilon$ der Lage nach gegeben; aber $\alpha\gamma$ ist der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt ε, und durch ihn ist $\delta\varepsilon$ der der Lage nach gegebenen parallel gezogen, mithin ist die Gerade $\delta\varepsilon$ der Lage nach gegeben. — Die Synthesis dieser Aufgabe geschieht auf folgende Weise. Es seien die beiden Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ der Lage nach gegeben; die der Grösse nach gegebene Gerade sei η, zu welcher die Parallele gezogen werden soll. Man mache $\alpha\zeta = \eta$, ziehe durch ζ zu $\alpha\beta$ die Parallele $\zeta\varepsilon$, und durch ε zu $\alpha\zeta$ die Parallele $\varepsilon\delta$, so wird $\varepsilon\delta$ der Aufgabe genügen. Denn da $\delta\varepsilon = \alpha\zeta$ und $\alpha\zeta = \eta$, so ist $\delta\varepsilon$ die verlangte Linie. Offenbar ist diese Linie die einzige, die der Aufgabe genügt, denn immer ist die dem Punkt α nähere kleiner als die entferntere.

Sind zwei Ebenen $\alpha\beta\gamma$, $\varepsilon\beta\zeta$ an derselben Geraden angelegt und stehen sie auf derselben Ebene senkrecht, so wird behauptet, dass $\alpha\beta$, $\beta\varepsilon$, $\beta\gamma$ in einer Ebene liegen. [*Command. CCXIX.*]



Errichtet man im Punkte β auf $\beta\gamma$ in der Ebene die Senkrechte $\beta\eta$, so steht sie auch auf der Ebene $\varepsilon\beta\zeta$ senkrecht, mithin auf auf $\beta\varepsilon$. Aus demselben Grunde steht sie auch auf $\alpha\beta$ senkrecht; aber sie steht auch auf $\beta\gamma$ senkrecht; demnach steht $\beta\eta$ auf den drei Geraden $\alpha\beta$, $\beta\varepsilon$. $\beta\gamma$ in deren Durchschnittspunkt senkrecht, folglich liegen die Geraden $\alpha\beta$, $\beta\varepsilon$, $\beta\gamma$ in einer Ebene.

Werden in den bei α. δ rechtwinkligen Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ die Linien $\alpha\eta$, $\delta\vartheta$ unter den gleichen Winkeln $\alpha\eta\beta$, $\delta\vartheta\varepsilon$ gezogen, und ist $\beta\eta : \eta\gamma = \varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$, so ist $\triangle\ \alpha\beta\eta \sim \triangle\ \delta\varepsilon\vartheta$, $\triangle\ \alpha\eta\gamma \sim \triangle\ \delta\vartheta\zeta$, mithin $\triangle\ \alpha\beta\gamma \sim \triangle\ \delta\varepsilon\zeta$. Verlängert man $\alpha\eta$, so dass $\delta\vartheta : \vartheta\varepsilon = \gamma\eta : \eta\varkappa$, und zieht $\beta\varkappa$, $\varkappa\gamma$, so ist $\angle\ \delta\varepsilon\vartheta = \angle\ \gamma\varkappa\eta$. Da aber $\beta\eta : \eta\gamma = \varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$ und [*Command CCXX.*]

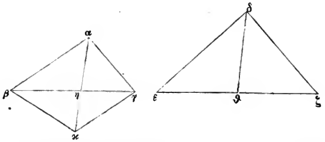
πρὸς ηκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βκ, κγ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ δεθ γωνία τῇ ὑπὸ γκη γωνίᾳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς μὲν ἡ βη πρὸς ηγ οὕτως ἡ εθ πρὸς θζ, ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ οὕτως ἡ δθ πρὸς θε· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ βη πρὸς ηκ οὕτως ἡ δθ πρὸς θζ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν βκη γωνία τῇ ζ γωνίᾳ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γκη γωνία ἴση τῇ ε, καί εἰσιν αἱ ε, ζ ὀρθαὶ ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ βκγ γωνία ἐστὶν ὀρθή. ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία ὀρθή· ἐκ κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ α, β, γ, κ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ακγ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ δεζ τῇ ὑπὸ αβγ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αηβ γωνία καθ' ὑπόθεσιν ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δθε γωνίᾳ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ αβη τρίγωνον τῷ δεθ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ δθζ ἐστὶν ὅμοιον.

Ἄλλως ἄμεινον. Τετμήσθωσαν δίχα τοῖς κ, λ σημείοις αἱ βγ, εζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, δλ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ βη πρὸς ηγ οὕτως ἡ εθ πρὸς θζ, συνθέντι [1]) καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι γίνεται ὡς ἡ γκ, τουτέστιν ἡ ακ πρὸς κη οὕτως ἡ λζ, τουτέστιν ἡ δλ πρὸς λθ. καί εἰσιν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς η, θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ καη, λδθ ἑκατέρα ἅμα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ακη γωνία τῇ ὑπὸ δλθ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση. καὶ ἡ β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ε. ἀλλὰ καὶ ἡ η γωνία τῇ θ ἴση ἐστίν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβη τρίγωνον τῷ δεθ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ δθζ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον.

Τοῦ $\overline{\zeta\eta}$.

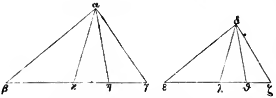
Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ αγ, καὶ διήχθω ἡ εζα· ὅτι τὸ ὑπὸ εαζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ζβγ καὶ τῷ ὑπὸ γδε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εγ, γζ, καὶ

[1]) So *Halley*; die Hdsch. haben συντεθήσται.



$\gamma\eta : \eta x = \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$, so ist auch $\beta\eta : \eta x = \delta\vartheta : \vartheta\zeta$, folglich da die eingeschlossenen Winkel gleich sind, $\angle\, \beta x \eta = \angle\, \zeta$. Nun war $\angle\, \gamma x \eta = \angle\, \varepsilon$ und da $\angle\, \zeta + \varepsilon = R$, so ist auch $\angle\, \beta x \gamma = R$, mithin liegen, da nach der Voraussetzung $\angle\, \beta\alpha\gamma = R$, die Punkte α, β, γ, x auf der Peripherie eines Kreises, daher $\angle\, \alpha x \gamma$ (d. h. $\angle\, \delta\varepsilon\zeta$) $= \angle\, \alpha\beta\gamma$, folglich, weil nach der Voraussetzung $\angle\, \alpha\eta\beta = \angle\, \delta\vartheta\varepsilon$, $\triangle\, \alpha\beta\eta \sim \triangle\, \delta\varepsilon\vartheta$, und aus demselben Grunde $\triangle\, \alpha\eta\gamma \sim \triangle\, \delta\vartheta\zeta$.

Ein anderer, besserer Beweis. Man halbire die Linien $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$ in den Punkten x, λ, und ziehe αx, $\delta\lambda$. Da nun $\beta\eta : \eta\gamma = \varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$, so ist auch γx oder αx) :



$x\eta = \lambda\zeta$ (oder $\delta\lambda$) $: \lambda\vartheta$; aber $\angle\, \eta = \angle\, \vartheta$, mithin da beide Winkel $x\alpha\eta$, $\lambda\delta\vartheta$ spitze sind, $\angle\, \alpha x \eta = \angle\, \delta\lambda\vartheta$, daher auch ihre Hälften, d. h. $\angle\, \beta = \angle\, \varepsilon$; folglich, da auch $\angle\, \eta = \angle\, \vartheta$, $\triangle\, \alpha\beta\eta \sim \triangle\, \delta\varepsilon\vartheta$, und aus gleichem Grunde $\triangle\, \alpha\eta\gamma \sim \triangle\, \delta\vartheta\zeta$.

Zum siebenten und achten Buch (der Kegelschnitte).

Zieht man durch das rechtwinklige [*Command. CCXXI.*] Parallelogramm $\alpha\gamma$ die Gerade $\alpha\zeta\varepsilon$, so ist Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta =$ Rechteck $\zeta\beta \,.\, \beta\gamma +$ Rechteck $\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon$.

τὰ ἀπὸ τῶν εα, αζ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εδ, δα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν εδ, βγ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βζ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, βζ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εαζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν εδ, δγ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ζβ, βγ, καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν εαζ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ εδγ καὶ τῷ ὑπὸ ζβγ. ὅπερ: —

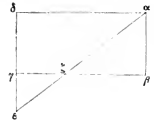
Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ αγ, καὶ διήχθω ἡ εαζ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εδ, δγ μετὰ τοῦ ὑπὸ γβζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ εαζ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εγ, γζ, ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν εα, αζ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν εδ, δγ, γβ, βζ· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εαζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν εδγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ζβγ, ὥστε καὶ τὸ ἅπαξ τῷ ἅπαξ.

Ἔστω μείζων ἡ αβ τῆς γδ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ γζδ, καὶ ἔστω μείζω τμήματα τὰ αε, γζ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αε τῆς γζ. Τετμήσθωσαν ὅλαι αἱ αβ, γδ δίχα τοῖς η, θ σημείοις· μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ ηβ τῆς δθ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ηβ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ δθ τετραγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ αεβ ἴσον τῷ ὑπὸ γζδ, καὶ τὸ ἀπὸ ηε ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ θζ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ηε τῆς θζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αη μείζων τῆς γθ· ὅλη ἄρα ἡ αε ὅλης τῆς γζ μείζων ἐστίν.

Ἴσον τὸ ὑπὸ αεβ τῷ ὑπὸ γζδ, ἴσων οὐσῶν τῶν αβ, γδ· ὅτι τὰ μείζονα τμήματα τὰ αε, γζ [ἴσα ἐστίν. Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ αβ, γδ δίχα τοῖς η, θ, καὶ τὰ ἐφεξῆς] [1]).

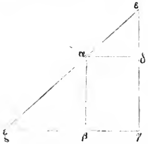
---

[1]) Die Hdsch. sind in diesem Lemma sehr luckenhaft. *Commandin* und *Halley* haben die eingeklammerte Ergänzung vorgeschlagen.



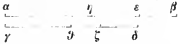
Da Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$ und Quadrat über $\zeta\alpha$ + Quadrat über $\alpha\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$ + Quadrat über $\delta\alpha$ + Quadrat über $\alpha\beta$ + Quadrat über $\beta\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$ + Quadrat über $\beta\gamma$ + Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\beta\zeta$, so ist, wenn man die Differenz Quadrat über $\varepsilon\alpha$ + Quadrat über $\alpha\zeta$ — Quadrat über $\varepsilon\zeta$ bildet, 2 Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$ = 2 Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\gamma$ + 2 Rechteck $\zeta\beta \,.\, \beta\gamma$, folglich auch Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\gamma$ + Rechteck $\zeta\beta \,.\, \beta\gamma$, was zu beweisen war.

Zieht man an dem rechtwinkligen [*Command. CCXXII.*] Parallelogramm $\alpha\gamma$ die Gerade $\varepsilon\alpha\zeta$, so ist Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\gamma$ + Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\zeta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$.



Da Quadrat über $\varepsilon\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\gamma$ + Quadrat über $\gamma\zeta$, und Quadrat über $\varepsilon\alpha$ + Quadrat über $\alpha\zeta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$ + Quadrat über $\delta\gamma$ + Quadrat über $\gamma\beta$ + Quadrat über $\beta\zeta$, so ist 2 Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \alpha\zeta$ = 2 Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\gamma$ + 2 Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\zeta$, und Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \alpha\zeta$ = Rechteck $\varepsilon\delta \,.\, \delta\gamma$ + Rechteck $\gamma\beta \,.\, \beta\zeta$.

Es sei $\alpha\beta > \gamma\delta$, Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ [*Command. CCXXIII.*] = Rechteck $\gamma\zeta \,.\, \zeta\delta$ und es seien $\alpha\varepsilon$, $\gamma\zeta$ die grösseren Abschnitte, so ist $\alpha\varepsilon > \gamma\zeta$.



Halbirt man die Linien $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ in den Punkten η, ϑ, so ist $\eta\beta > \vartheta\delta$, folglich auch Quadrat über $\eta\beta$ > Quadrat über $\delta\vartheta$. Nun ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ = Rechteck $\gamma\zeta \,.\, \zeta\delta$, daher Quadrat über $\eta\varepsilon$ > Quadrat über $\vartheta\zeta$ und $\eta\varepsilon > \vartheta\zeta$; aber $\alpha\eta > \gamma\delta$, mithin $\alpha\varepsilon > \gamma\zeta$.

Ist $\alpha\beta = \gamma\delta$ und Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$ [*Command. CCXXIV.*] = Rechteck $\gamma\zeta \,.\, \zeta\delta$, so sind die grössern Abschnitte $\alpha\varepsilon$, $\gamma\zeta$ einander gleich.

Ἔστω μὲν μείζων ἡ αβ τῆς γδ, ἐλάσσων δὲ ἡ βε τῆς δζ, οὔσης μείζονος τῆς μὲν αβ τῆς βε, τῆς δὲ γδ τῆς δζ· ὅτι ἡ τῶν αβ, βε ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν γδ, δζ ὑπεροχῆς. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶ [ἡ αβ τῆς γδ, μείζων ἄρα ἔσται ἡ τῶν αβ, βε ὑπεροχὴ τῆς] [1]) τῶν γδ, βε ὑπεροχῆς. ἀλλὰ ἡ τῶν γδ, εβ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν γδ, δζ ὑπεροχῆς, ἐλάσσων γάρ ἐστιν ἡ εβ τῆς δζ, ὥστε ἡ τῶν αβ, βε ὑπεροχὴ πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν γδ, δζ ὑπεροχῆς.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν αβ τῇ βγ, ἡ δὲ δε τῇ δζ· ὅτι τὸ ὑπὸ αγ, δζ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ αβ, δε. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ γα τῆς αβ, κοινὸν ὕψος ἡ δε, τὸ ἄρα ὑπὸ γα, δε διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ αβ, δε. πάλιν ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δζ τῆς δε, κοινὸν ὕψος ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ αγ, δζ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ αγ, δε. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ [αγ, δε τοῦ ὑπὸ αβ, δε, τὸ ἄρα ὑπὸ αγ, δζ τετραπλάσιόν ἐστι] [2]) τοῦ ὑπὸ αβ, δε.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βη οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εθ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αβη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αηγ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δεθ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζθδ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βη οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εθ, ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δθ, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτω τὸ ἀπὸ εδ πρὸς τὸ ἀπὸ δθ ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ αβη οὕτω τὸ ἀπὸ δε πρὸς τὸ ὑπὸ δεθ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ αβη οὕτω τὸ ἀπὸ δθ πρὸς τὸ ὑπὸ δεθ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, ἀνάπαλιν συνθέντι καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς τὴν αβ οὕτως ἡ ζδ πρὸς τὴν δε. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αη οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δθ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αη οὕτως ἡ ζδ πρὸς δθ· καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς τὴν ηα οὕτως ἡ ζθ πρὸς δθ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ αηγ πρὸς τὸ ἀπὸ αη οὕτω τὸ ὑπὸ ζθδ πρὸς τὸ ἀπὸ δθ.

---

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

[2]) Einschaltung von *Commandin*.



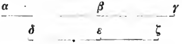
Halbirt man die Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ in den Punkten η, ϑ, u. s. w.

Ist $\alpha\beta \not> \beta\varepsilon$, $\gamma\delta > \delta\zeta$ und [*Command. CCXXV.*] $\alpha\beta > \gamma\delta$, $\beta\varepsilon$ aber $< \delta\zeta$, so ist $\alpha\beta - \beta\varepsilon > \gamma\delta - \delta\zeta$.



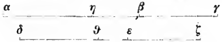
Da $\alpha\beta > \gamma\delta$, so ist auch $\alpha\beta - \beta\varepsilon > \gamma\delta - \beta\varepsilon$; aber $\gamma\delta - \beta\varepsilon > \gamma\delta - \delta\zeta$, weil $\beta\varepsilon < \delta\zeta$, folglich $\alpha\beta - \beta\varepsilon$ um vieles $> \gamma\delta - \delta\zeta$.

Ist $\alpha\beta = \beta\gamma$ und $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$, so [*Command. CCXXVI.*] ist Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\zeta = 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \delta\varepsilon$.



Da $\alpha\gamma = 2\ \alpha\beta$, so ist, wenn $\delta\varepsilon$ als gemeinschaftliche Höhe betrachtet wird, Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\varepsilon = 2$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \delta\varepsilon$. Da ferner $\delta\zeta = 2\ \delta\varepsilon$, so ist, wenn $\alpha\gamma$ die gemeinschaftliche Höhe, Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\zeta = 2$ Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\varepsilon$. Aber Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\varepsilon = 2$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \delta\varepsilon$, folglich Rechteck $\alpha\gamma \,.\, \delta\zeta = 4$ Rechteck $\alpha\beta \,.\, \delta\varepsilon$.

Ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$ und [*Command. CCXXVII.*] $\alpha\beta : \beta\eta = \delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$, so ist Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$: Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\gamma$ = Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$: Rechteck $\zeta\vartheta \,.\, \vartheta\delta$.



Da $\alpha\beta : \beta\eta = \delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$, so ist auch $\beta\alpha : \alpha\eta = \varepsilon\delta : \delta\vartheta$,

mithin Quadrat über $\beta\alpha$: Quadrat über $\alpha\eta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$: Quadrat über $\delta\vartheta$;

aber Quadrat über $\beta\alpha$: Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$,

folglich Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$ = Quadrat über $\delta\vartheta$: Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$.

Nun ist aber vorausgesetzt, dass $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, mithin $\gamma\alpha : \alpha\beta = \delta\zeta : \delta\varepsilon$, und da $\beta\alpha : \alpha\eta = \varepsilon\delta : \delta\vartheta$, so ist $\gamma\alpha : \alpha\eta = \zeta\delta : \delta\vartheta$, folglich $\gamma\eta : \eta\alpha = \zeta\vartheta : \delta\vartheta$ und Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\gamma$: Quadrat über $\alpha\eta$ = Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\vartheta$: Quadrat über $\delta\vartheta$; aber es war Quadrat über $\alpha\eta$: Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$ = Quadrat über $\delta\vartheta$: Rechteck

ἀλλὰ ὡς τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ αβη οὕτω τὸ ἀπὸ δϑ πρὸς τὸ ὑπὸ δεϑ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ αβη πρὸς τὸ ὑπὸ αηγ οὕτω τὸ ὑπὸ δεϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ζϑδ.

Ἔστω δοθέντα [συναμφότερα] [1]) τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ. καὶ δοθεῖσα ἡ τῶν ἀπὸ αβ, βγ ὑπεροχή· ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν αβ, βγ. Κείσθω γὰρ τῇ γβ ἴση ἡ βδ, δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ὑπὸ τῶν γαδ. ἀλλὰ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν γαδ δοθέν ἐστιν. ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ γαδ δοθέν ἐστιν. ὑπεροχὴ γάρ ἐστι τῶν ἀπὸ αβ, βγ τετραγώνων, δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον ἀπὸ τῆς γα, αδ, ὥστε δοθέν ἐστι συναμφοτέρα ἡ γα, αδ. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ βα· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ βα, ὥστε καὶ ἡ βγ δοθεῖσά ἐστιν.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν αβ τῇ βγ, ἡ δὲ δε τῇ εζ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἡ γβ πρὸς βη οὕτως ἡ ζε πρὸς εϑ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ αηβ πρὸς τὸ ὑπὸ βγη οὕτω τὸ ὑπὸ δϑε πρὸς τὸ ὑπὸ εζϑ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ γβ πρὸς βα οὕτως ἡ ζε πρὸς εδ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ γβ πρὸς βη οὕτως ἡ ζε πρὸς εδ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ὑπὸ αηβ οὕτω τὸ ἀπὸ δϑ πρὸς τὸ ὑπὸ δϑε. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ αη πρὸς τὸ ἀπὸ βγ οὕτω τὸ ἀπὸ δϑ πρὸς τὸ ἀπὸ εζ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ὑπὸ βγη οὕτω τὸ ἀπὸ εζ πρὸς τὸ ὑπὸ εζϑ, ἔσται ἄρα δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ αηβ πρὸς τὸ ὑπὸ βγη οὕτω τὸ ὑπὸ δϑε πρὸς τὸ ὑπὸ εζϑ.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν αβ τῇ βγ, ἐλάσσων δὲ ἡ βδ [τῆς βε· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδβ πρὸς τὸ ὑπὸ] [2]) τῶν βγδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ τῶν γεβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βαε. Ἐπεὶ γὰρ ἴση μέν ἐστιν ἡ αβ τῇ βγ, ἐλάσσων δὲ ἡ βδ τῇ βε, ἡ γδ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς αε, ὥστε καὶ ἡ γε μείζων ἐστὶ τῆς αδ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αδβ τοῦ ὑπὸ γεβ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν βγδ τοῦ ὑπὸ βαε· τὸ ἄρα ὑπὸ αδβ πρὸς τὸ ὑπὸ βγδ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ γεβ προς τὸ ὑπὸ βαε.

Ἔστω δὲ νῦν τὸ τοῖς προηγουμένης ἀνάστροφον δεῖξαι.

---

[1]) Einschaltung von *Halley*.

[2]) Einschaltung von *Commandin*.

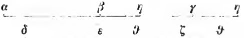
$\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$, mithin Rechteck $\alpha\beta \,.\, \beta\eta$: Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\gamma$ = Rechteck $\delta\varepsilon \,.\, \varepsilon\vartheta$: Rechteck $\zeta\delta \,.\, \delta\vartheta$.

Ist die Summe der Quadrate [*Command. CCXXVIII.*] über $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ zugleich mit der Differenz derselben gegeben, so ist sowohl $\alpha\beta$ als $\beta\gamma$ gegeben.



Es sei $\beta\delta = \gamma\beta$, so ist Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\delta$ gegeben, denn es ist der Unterschied der Quadrate über $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$. Ist aber Rechteck $\gamma\alpha \,.\, \alpha\delta$ gegeben, so ist auch das Doppelte davon gegeben, mithin auch Quadrat über $\gamma\alpha + \alpha\delta$, folglich die Summe $\gamma\alpha + \alpha\delta$. Davon ist aber die Hälfte die Linie $\alpha\beta$. mithin ist $\alpha\beta$ gegeben, daher auch $\beta\gamma$.

Ist $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$ und $\gamma\beta : \eta\beta = \zeta\varepsilon$: [*Command. CCXXIX.*] $\varepsilon\vartheta$, so ist Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$ Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ = Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$.



Da $\gamma\beta : \beta\alpha = \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$ und $\gamma\beta : \beta\eta = \zeta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$,

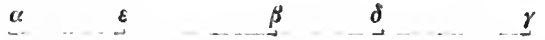
so ist Quadrat über $\alpha\eta$. Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$ = Quadrat über $\delta\vartheta$: Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\varepsilon$;

aber Quadrat über $\alpha\eta$: Quadrat über $\beta\gamma$ = Quadrat über $\delta\vartheta$: Quadrat über $\varepsilon\zeta$,

und Quadrat über $\beta\gamma$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ = Quadrat über $\varepsilon\zeta$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$,

folglich Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ = Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$.

Ist $\alpha\beta = \beta\gamma$, aber $\beta\delta < \beta\varepsilon$, so [*Command. CCXXX.*] ist Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\delta$ < Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$: Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$.



Da $\alpha\beta = \gamma\beta$ und $\beta\delta < \beta\varepsilon$, so ist $\gamma\delta > \alpha\varepsilon$ und $\gamma\varepsilon > \alpha\delta$, mithin Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$ < Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$, Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\delta$ > Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$, folglich Rechteck $\alpha\delta \,.\, \delta\beta$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\delta$ < Rechteck $\gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta$: Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$.

Es ist noch die Umkehrung des [*Command. CCXXXI.*]

οὔσης ἴσης τῆς μὲν αβ τῇ βγ, τῆς δὲ δε τῇ εζ, καὶ ἔτι ὡς τὸ ὑπὸ αηβ πρὸς τὸ ὑπὸ βγη οὕτω τὸ ὑπὸ δθε πρὸς τὸ ὑπὸ εζθ· δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ γβ πρὸς βη οὕτως ἡ ζε πρὸς εθ. Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ αηβ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν γη, ακ, τῷ δὲ ὑπὸ δθε ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ζθ, δλ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ακ, γη πρὸς τὸ ὑπὸ βγη, τουτέστιν ἡ ακ πρὸς βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ δλ, ζθ πρὸς τὸ ὑπὸ εζθ, τουτέστιν ἡ δλ πρὸς εζ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ γβ πρὸς βα οὕτως ἐστὶν ἡ ζε πρὸς εδ· αἱ αβ, βγ, γκ ἄρα ταῖς δε, εζ, ζλ ὁμοταγεῖς εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς ἡ βγ πρὸς γκ οὕτως ἡ εζ πρὸς ζλ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αηβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ακ, γη, ἀμφότερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ακ, ηβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηκ, ηβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ακ, βγ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ακ, βγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βηκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ. διὰ ταῦτα δὴ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν δλ, εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ελ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθλ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ελ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ακ, βγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δλ, εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ελ, διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοιοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ βηκ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ οὕτω τὸ ὑπὸ εθλ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ. καὶ ἔστι τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ βη, εθ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κβ πρὸς βη οὕτως ἡ λε πρὸς εθ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς βη οὕτως ἐστὶν ἡ ζε πρὸς θε.

Ἔστω ἡ μὲν αβ τῇ βγ, ἡ δὲ δε τῇ εζ, ἔτι δὲ ἡ βγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν ζθ· ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως καὶ ἡ αη πρὸς τὴν βγ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ δθ πρὸς τὴν εζ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ εζ πρὸς ζθ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ γβ πρὸς βη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] [1]) ἡ ζε πρὸς εθ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω. ὥστε καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν βη, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ δε πρὸς εθ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω· καὶ ἡ ηα ἄρα πρὸς τὴν αβ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θδ πρὸς δε, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω· καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ δε πρὸς εζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ αη πρὸς τὴν βγ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ δθ πρὸς τὴν εζ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω.

---

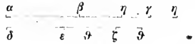
[1]) Einschaltung von *Commandin.*

vorhergehenden Satzes zu beweisen. Wenn $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$ und Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ = Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\varepsilon$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$, so ist $\gamma\beta : \beta\eta = \zeta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$.



Es sei Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$ = Rechteck $\gamma\eta \,.\, \alpha\varkappa$ und Rechteck $\zeta\vartheta \,.\, \delta\lambda$ = Rechteck $\delta\vartheta \,.\, \vartheta\varepsilon$, so ist Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \gamma\eta$: Rechteck $\beta\gamma \,.\, \gamma\eta$ (d. h. $\alpha\varkappa : \beta\gamma$) = Rechteck $\delta\lambda \,.\, \zeta\vartheta$: Rechteck $\varepsilon\zeta \,.\, \zeta\vartheta$ (d. h. $\delta\lambda : \varepsilon\zeta$); es ist aber auch $\gamma\beta : \beta\alpha = \zeta\varepsilon : \varepsilon\delta$, daher stehen die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\varkappa$ zu den Linien $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, $\zeta\lambda$ in demselben Verhältniss, nämlich $\beta\gamma : \gamma\varkappa = \varepsilon\zeta : \zeta\lambda$. Da aber Rechteck $\alpha\eta \,.\, \eta\beta$ = Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \gamma\eta$, so ist, wenn beides vom Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \eta\beta$ subtrahirt wird, Rechteck $\eta\varkappa \,.\, \eta\beta$ = Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \beta\gamma$, folglich Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \beta\gamma$: Quadrat über $\beta\varkappa$ = Rechteck $\beta\eta \,.\, \eta\varkappa$: Quadrat über $\beta\varkappa$. Aus demselben Grunde ist Rechteck $\delta\lambda \,.\, \varepsilon\zeta$: Quadrat über $\varepsilon\lambda$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \vartheta\lambda$: Quadrat über $\varepsilon\lambda$. Nun ist aber Rechteck $\alpha\varkappa \,.\, \beta\gamma$: Quadrat über $\beta\varkappa$ = Rechteck $\delta\lambda \,.\, \varepsilon\zeta$: Quadrat über $\varepsilon\lambda$, folglich Rechteck $\beta\eta \,.\, \eta\varkappa$: Quadrat über $\beta\varkappa$ = Rechteck $\varepsilon\vartheta \,.\, \vartheta\lambda$: Quadrat über $\varepsilon\lambda$; aber $\beta\eta$, $\varepsilon\vartheta$ sind dieselben Abschnitte, daher $\varkappa\beta : \beta\eta = \lambda\varepsilon : \varepsilon\vartheta$, mithin $\beta\gamma : \beta\eta = \zeta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$.

Wenn $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$ und [*Command. CCXXXII.*] $\beta\gamma : \gamma\eta > \varepsilon\zeta : \zeta\vartheta$, so ist im ersten Falle $\alpha\eta : \beta\gamma > \delta\vartheta : \varepsilon\zeta$, im zweiten Falle $\alpha\eta : \beta\gamma < \delta\vartheta : \varepsilon\zeta$.



Da $\beta\gamma : \gamma\eta > \varepsilon\zeta : \zeta\vartheta$, so ist im ersten Falle $\gamma\beta : \beta\eta < \varepsilon\zeta : \varepsilon\vartheta$, im zweiten Falle $\gamma\beta : \beta\eta > \varepsilon\zeta : \varepsilon\vartheta$, und daher $\alpha\beta : \beta\eta < \delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$ im ersten Falle, im zweiten Falle $\alpha\beta : \beta\eta > \delta\varepsilon : \varepsilon\vartheta$; mithin im ersten Falle $\eta\alpha : \alpha\beta > \vartheta\delta : \delta\varepsilon$, im zweiten Falle $\eta\alpha : \alpha\beta < \vartheta\delta : \delta\varepsilon$; aber $\alpha\beta : \beta\gamma = \delta\varepsilon : \varepsilon\zeta$, folglich im ersten Falle $\alpha\eta : \beta\gamma > \delta\vartheta : \varepsilon\zeta$, im zweiten Falle $\alpha\eta : \beta\gamma < \delta\vartheta : \varepsilon\zeta$

Ἔστω πάλιν ἴση ἡ μὲν αβ τῇ βγ, ἡ δὲ δε τῇ εζ, ἔτι δὲ ἡ αη πρὸς τὴν ηβ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ δθ πρὸς τὴν θε· ὅτι καὶ ἡ βγ πρὸς τὴν γη μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν ζθ. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ ἀναστροφὴν καὶ διαίρεσιν ἡ ηβ πρὸς τὴν βα, τουτέστι τὴν βγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θε πρὸς τὴν εδ, τουτέστι πρὸς τὴν εζ, ἀναστρέψαντι καὶ διελόντι ἡ βγ πρὸς τὴν γη μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν ζθ.

Ἴση μὲν ἡ αβ τῇ βγ, ἡ δὲ δε τῇ εζ, καὶ ἔτι ἡ αη πρὸς τὴν ηβ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ δθ πρὸς τὴν θε· ὅτι ἡ βη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα [1]) λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εθ πρὸς τὴν θζ. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ αβ, τουτέστιν ἡ βγ, πρὸς τὴν βη μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ δε, τουτέστιν ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, ἀναστρέψαντι καὶ κατὰ διαίρεσιν ἡ βη πρὸς τὴν ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εθ πρὸς τὴν θζ.

Εἰς τὰς πρὸς ἐπιφάνειαν. *)

Ἐὰν εὐθεῖα ἡ αβ καὶ παραθέσει ἡ γδ, καὶ ᾖ λόγος τοῦ ὑπὸ αδβ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ, τὸ γ ἅπτεται κωνικῆς γραμμῆς. ἐὰν οὖν ἡ μὲν αβ στερηθῇ τῆς θέσεως καὶ τὰ α, β στερηθῇ τοῦ δοθέντος εἶναι, γένηται δὲ προσθέσει εὐθεῖα ταῖς αε, εβ, τὸ γ μετεωρισθὲν γίνεται προσθέσει ἐπιφανείας. τοῦτο δὲ ἐδείχθη.

Ἐὰν ᾖ θέσει εὐθεῖα ἡ αβ καὶ δοθὲν τὸ γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διαχθῇ ἡ δγ, καὶ παραθέσει ἀχθῇ ἡ δε, λόγος δὲ ᾖ [2]) τῆς γδ πρὸς δε, τὸ δ ἅπτεται θέσει κωνικῆς τομῆς·

---

[1]) So *Commandin* und *Halley*, die Hdsch. haben *μείζονα*.

*) Nach dem, was Pappus in der Vorrede zum siebenten Buche sagt: *ὧν τὰς περιοχὰς μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν* etc ist zu schliessen, dass das Folgende bis zu Ende nicht von ihm herrührt. — Vielleicht ist in der Ueberschrift zu lesen: *Εἰς τοὺς (sc. τόπους) πρὸς ἐπιφάνειαν.*

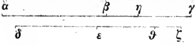
[2]) Die Hdsch. haben *ἦν*.

Ist $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$ und [*Command.* CCXXXIII.]
$\alpha\eta : \eta\beta < \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$, so ist $\beta\gamma : \gamma\eta > \varepsilon\zeta : \zeta\vartheta$.



Da $\eta\beta : \beta\alpha$ (d. h. $\beta\gamma$) $> \vartheta\varepsilon : \varepsilon\delta$ (d. h. $\varepsilon\zeta$), so ist $\beta\gamma : \gamma\eta > \varepsilon\zeta : \zeta\vartheta$.

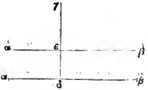
Wenn $\alpha\beta = \beta\gamma$, $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$ und [*Command.* CCXXXIV.]
$\alpha\eta : \eta\beta > \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon$, so ist $\beta\eta : \eta\gamma > \varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$.

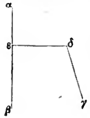


Da $\alpha\beta$ (d. h. $\beta\gamma$) $: \beta\eta > \delta\varepsilon$ (d. h. $\varepsilon\zeta$) $: \varepsilon\vartheta$, so ist $\beta\eta : \eta\gamma < \varepsilon\vartheta : \vartheta\zeta$.

Zu den Linien auf der Oberfläche.

Wenn man die Gerade $\alpha\beta$ hat, [*Command.* CCXXXV.] und die $\gamma\delta$ (zu einer gegebenen Linie) parallel, und das Verhältniss von Rechteck $\alpha\delta \cdot \delta\beta$ zu dem Quadrat über $\delta\gamma$ gegeben ist, so liegt der Punkt γ auf einem Kegelschnitt. Wenn nun $\alpha\beta$ aus seiner Lage gebracht wird und die Punkte α, β aufhören gegeben zu sein, eine Gerade aber in den Linien $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ daneben wird, so liegt der hinaufgerückte Punkt γ auf einer daneben liegenden Oberfläche. Dies ist bewiesen worden.





Wenn die der Lage nach gegebene Gerade $\alpha\beta$ und der Punkt γ in derselben Ebene liegen, $\delta\gamma$ gezogen und $\delta\varepsilon$ zu einer gegebenen Linie parallel ist, ferner das Verhältniss von $\gamma\delta$ zu $\delta\varepsilon$ gegeben ist, so liegt der Punkt δ auf einem der Lage nach gegebenen Kegelschnitt. Es

δείκνυται δὲ ὅτι γραμμῆς ......[1]) δειχθήσεται δὲ οὕτω, προγραφέντος τόπου τοῦδε.

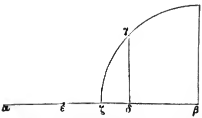
Δύο δοθέντων τῶν α, β, καὶ ὀρθῆς τῆς δγ, λόγος ἔστω τοῦ ἀπὸ αδ πρὸς τὰ γδ, δβ· λέγω ὅτι τὸ γ ἅπτεται κώνου τομῆς, ἐάν τε ᾖ ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον ἢ μείζων πρὸς ἐλάσσονα ἢ ἐλάσσων πρὸς μείζονα. Ἔστω γὰρ πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον· καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ αδ τοῖς ἀπὸ γδ, δβ, κείσθω τῇ βδ ἴση ἡ δε, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ βαε τῷ ἀπὸ δγ. τετμήσθω δίχα ἡ αβ τῷ ζ· δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ ἔσται διπλῆ ἡ αε τῆς δζ, ὥστε τὸ ὑπὸ βαε τὸ δίς ἐστιν ὑπὸ τῶν αβ, ζδ· καὶ ἔστιν ἡ διπλῆ τῆς αβ δοθεῖσα, τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ζδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ· τὸ γ ἄρα ἅπτεται θέσει παραβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ ζ. Συντεθήσεται δὴ ὁ τόπος οὕτως· ἔστω τὰ δοθέντα α, β, ὁ δὲ λόγος ἔστω ἴσος πρὸς ἴσον. καὶ τετμήσθω ἡ αβ δίχα τῷ ζ, τῆς δὲ αβ διπλῆ ἔστω ἡ ρ· καὶ θέσει οὔσης εὐθείας τῆς ζβ πεπερασμένης κατὰ τὸ ζ, τῆς δὲ ρ δεδομένης τῷ μεγέθει, γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ζβ παραβολὴ ἡ ηζ, ὥστε οἷον ἐὰν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ληφθῇ ὡς τὸ γ, κάθετος δὲ ἀχθῇ ἡ γδ, ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ρ, ζδ τῷ ἀπὸ δγ. καὶ ἤχθω ὀρθὴ ἡ βη· λέγω ὅτι τὸ γη μέρος τῆς παραβολῆς ἐστιν. ἤχθω γὰρ κάθετος ἡ γδ, καὶ τῇ βδ ἴση κείσθω ἡ δε· ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν αβ τῆς βζ, ἡ δὲ εβ τῆς βδ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ αε τῆς ζδ· τὸ ἄρα ὑπὸ βαε ἴσον ἐστὶ τῷ δίς ὑπὸ τῶν αβ, ζδ, τουτέστι τῷ ἀπὸ δγ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εδ ἴσον ὂν τῷ ἀπὸ δβ, ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ αδ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, δβ· ἡ ζγη ἄρα γραμμὴ ποιεῖ τὸν τόπον.

---

[1]) Diese Lücke lasst sich dem Zusammenhange nach so ergänzen: ὅτι γραμμῆς μέρος ποιεῖ τὸν τόπον.

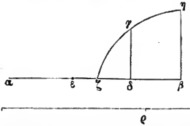
wird gezeigt, dass ein Theil der Linie den Ort bildet. Zum Beweise wird der folgende Ort vorausgeschickt.

Es seien die Punkte α, β, die [Command. CCXXXVI.] Senkrechte $\delta\gamma$, und das Verhältniss des Quadrats über $\alpha\delta$ zu den Quadraten über $\gamma\delta$ und $\delta\beta$ gegeben, so liegt der Punkt γ auf einem Kegelschnitt, mag das gegebene Verhältniss ein Verhältniss der Gleichheit oder des Grössern zum Kleineren oder des Kleineren zum Grösseren sein.



Es sei zuerst das Verhältniss ein Verhältniss der Gleichheit. Da nun Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\delta\beta$, so ist, wenn $\delta\varepsilon = \beta\delta$, Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\varepsilon$ = Quadrat über $\delta\gamma$. Halbirt man $\alpha\beta$ in ζ, so ist der Punkt ζ gegeben, und $\alpha\varepsilon = 2\,\delta\zeta$, mithin Rechteck $\beta\alpha \cdot \alpha\varepsilon = 2$ Rechteck $\alpha\beta \cdot \zeta\delta$. Es ist aber das Doppelte von $\alpha\beta$ gegeben, folglich Rechteck aus der gegebenen und $\zeta\delta$ = Quadrat über $\delta\gamma$, daher liegt der Punkt γ auf einer Parabel, die durch den Punkt ζ geht.

Die Synthesis dieses Ortes ist die folgende: Es seien α, β die gegebenen Punkte, und es sei das Verhältniss das Verhältniss der Gleichheit. Man halbire $\alpha\beta$ in ζ, und das Doppelte von $\alpha\beta$ sei ϱ. Da nun die Gerade $\zeta\beta$, die sich in ζ endigt, der Lage nach und ϱ der Grösse nach gegeben sind, so beschreibe man über der Axe $\zeta\beta$ die Parabel $\eta\zeta$, so dass, wenn irgend ein Punkt γ auf ihr angenommen und die Senkrechte $\gamma\delta$ gefällt wird, Rechteck $\varrho \cdot \zeta\delta$ = Quadrat über $\delta\gamma$.



Zieht man noch die Senkrechte $\beta\eta$, so wird behauptet, dass $\gamma\eta$ ein Theil der Parabel ist. Man fälle die Senkrechte $\gamma\delta$, und sei $\delta\varepsilon = \beta\delta$. Da nun $\alpha\beta = 2\,\beta\zeta$ und

Ἔστω δὴ πάλιν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα τὰ α, β, καὶ ἐφαπτέσθω [1]) ἡ δγ καὶ ὀρθὴ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ἀπὸ αδ πρὸς τὰ ἀπὸ βδ, δγ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσων πρὸς μείζονα [2])· λέγω ὅτι τὸ γ ἅπτεται κώνου τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς. Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ἀπὸ αδ πρὸς τὰ ἀπὸ βδ, δγ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ἀπὸ δε πρὸς τὸ ἀπὸ βδ· ἐπὶ μὲν οὖν τῆς πρώτης πτώσεως μείζων ἐστὶν ἡ δε τῆς βδ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσων ἐστὶν ἡ δε τῆς βδ. κείσθω τῇ εδ ἴση ἡ δζ. ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ἀπὸ αδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ, δβ, καὶ ἔστιν αὐτῷ ὁ αὐτὸς ὁ τοῦ ἀπὸ εδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, καὶ λοιπὸς ἄρα τὸ ὑπὸ ζαε πρὸς τὸ ἀπὸ δγ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς εδ πρὸς δβ, καὶ τῆς ζβ πρὸς δβ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς αβ πρὸς βη· καὶ ὅλης ἄρα τῆς αζ πρὸς δη λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς εδ πρὸς δβ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς αθ πρὸς βθ· λόγος ἄρα τῆς αβ πρὸς βθ δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ θ. καὶ λοιπὸς τῆς αε πρὸς θδ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τοῦ ὑπὸ ζαε ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ θδη λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ δὲ ὑπὸ ζαε πρὸς τὸ ἀπὸ γδ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τοῦ ὑπὸ ηδθ πρὸς τὸ ἀπὸ δγ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δύο δοθέντα τὰ θ, η· ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης πτώσεως τὸ γ ἅπτεται ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς. Συντεθήσεται δὲ ὁ τόπος οὕτως· ἔστω τὰ μὲν δύο δοθέντα σημεῖα τὰ α, β, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ ρτ πρὸς τὸ ἀπὸ τσ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσων πρὸς μείζονα. καὶ τῇ ρτ κείσθω ἡ τγ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ υσ πρὸς τὴν στ οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βη, πεποιήσθω δὲ καὶ ὡς ἡ ρτ πρὸς τὴν τε οὕτως ἡ αθ πρὸς τὴν θβ. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν θη, ἐπὶ μὲν τῆς πρώ-

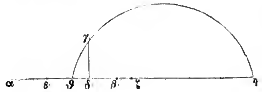
---

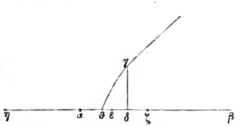
[1]) Die Hdsch. haben ἐφάπτεται.

[2]) In den Hdsch. findet hier eine Verwechselung zwischen μείζων und ἐλάσσων statt, die schon *Commandin* bemerkt hat.

$\varepsilon\beta = 2\,\beta\delta$, so ist auch $\alpha\varepsilon = 2\,\zeta\delta$, folglich Rechteck $\beta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon =$ 2 Rechteck $\alpha\beta \,.\, \zeta\delta$, d. h. = dem Quadrat über $\delta\gamma$. Addirt man Quadrat über $\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\delta\beta$ hinzu, so ist Quadrat über $\alpha\delta$ = Quadrat über $\gamma\delta$ + Quadrat über $\delta\beta$, mithin bildet die Linie $\zeta\gamma\eta$ den Ort.

Es seien wiederum die Punkte [*Command. CCXXXVII.*] α, β gegeben und $\delta\gamma$ treffe senkrecht; ferner sei das Verhältniss von Quadrat über $\alpha\delta$ zu den Quadraten über $\beta\delta$ und über $\delta\gamma$ im ersten Fall des Grössern zum Kleineren, im zweiten Falle des Kleineren zum Grösseren, so liegt der Punkt γ auf einem Kegelschnitt und zwar im ersten Falle auf einer Ellipse, im zweiten Falle auf einer Hyperbel.





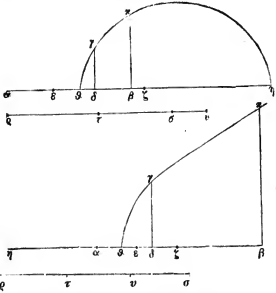
Ebenso wie das gegebene Verhältniss des Quadrats über $\alpha\delta$ zu den Quadraten über $\beta\delta$ und über $\delta\gamma$ verhalte sich das Quadrat über $\delta\varepsilon$ zu dem Quadrat über $\beta\delta$; alsdann ist im ersten Falle $\delta\varepsilon > \beta\delta$, im zweiten Falle $\delta\varepsilon < \beta\delta$. Es sei $\delta\zeta = \delta\varepsilon$. Da nun das Verhältniss des Quadrats über $\alpha\delta$ zu den Quadraten über $\gamma\delta$ und über $\delta\beta$ gegeben und mit ihm das Verhältniss des Quadrats über $\varepsilon\delta$ zu dem Quadrat über $\beta\delta$ übereinstimmt, so ist auch das Verhältniss des Rechtecks $\zeta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$ zu dem Quadrat über $\delta\gamma$ gegeben. Da ferner das Verhältniss von $\varepsilon\delta$ zu $\delta\beta$, mithin auch das von $\zeta\beta$ zu $\beta\delta$ gegeben, so stimme mit ihm das Verhältniss von $\alpha\beta$ zu $\beta\eta$ überein, daher ist auch das Verhältniss von $\alpha\zeta$ zu $\delta\eta$ gegeben. Mit dem gegebenen Verhältniss $\varepsilon\delta : \delta\beta$ stimme ferner überein das Verhältniss $\alpha\vartheta : \beta\vartheta$, folglich ist auch $\alpha\beta : \beta\vartheta$ gegeben, demnach auch der Punkt ϑ. Nun

της πτώσεως ἔλλειψις, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολή, ὥστε οἷον ἐὰν ἐπ᾽ αὐτῆς ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ γ καὶ κάθετος ἀχθῇ ἡ γδ, λόγον εἶναι τοῦ ὑπὸ τῶν θδη πρὸς τὸ ἀπὸ δγ τὸν συνημμένον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ τσ πρὸς συ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τσ πρὸς σρ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ὁ δοθεὶς λόγος ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ρτ πρὸς τὸ ἀπὸ τσ. κατήχθω ὀρθὴ ἡ βκ· λέγω ὅτι ἡ θκ ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα. ἤχθω γὰρ κάθετος ἡ γδ καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν βη οὕτως ἡ ζβ πρὸς τὴν βδ, ὡς δὲ η αθ πρὸς τὴν θβ οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δβ, ὥστε ἔσται ὁ μὲν τῆς δη πρὸς τὴν αζ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ηβ πρὸς τὴν βα, τουτέστι τῷ τῆς τσ πρὸς συ· ὁ δὲ τῆς θδ πρὸς αε λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς τσ πρὸς σρ· τὸ αὐτὸ γὰρ ἐν τῇ ἀναλύσει ἀπεδείχθη. ὥστε τοῦ ὑπὸ θδη πρὸς τὸ ὑπὸ ζαε λόγος συνῆπται ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τσ πρὸς συ καὶ ἡ τσ πρὸς σρ· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ θδη πρὸς τὸ ἀπὸ δγ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τσ πρὸς συ καὶ ἡ στ πρὸς σρ [καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ὁ δοθεὶς λόγος] [1]) καὶ ἔστιν ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ ρτ πρὸς τὸ ἀπὸ τσ· τὸ ὑπὸ θδη πρὸς τὸ ἀπὸ δγ συνῆπται ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ θδη πρὸς τὸ ὑπὸ ζαε καὶ τὸ ὑπὸ ζαε πρὸς τὸ ἀπὸ δγ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν θδη πρὸς τὸ ὑπὸ ζαε λόγος ὁ αὐτὸς τῷ συνημμένῳ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τσ πρὸς συ καὶ ἡ τσ πρὸς σρ· λοιπὸς ἄρα τοῦ ὑπὸ ζαε πρὸς τὸ ἀπὸ δγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ρτ πρὸς τὸ ἀπὸ τσ, τουτέστι τῷ τοῦ ἀπὸ εδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ· καὶ πάντα πρὸς πάντα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ, δβ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ρτ πρὸς τὸ ἀπὸ τσ, τουτέστιν ὁ δοθεὶς λόγος. ὥστε τὸ θκ μέρος τῆς τομῆς ποιεῖ τὸν τόπον.

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

ist das Verhältniss $\alpha\varepsilon : \delta\vartheta$ gegeben, folglich auch das Verhältniss von Rechteck $\zeta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$: Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \delta\eta$; aber das Verhältniss von Rechteck $\zeta\alpha \,.\, \alpha\varepsilon$: Quadrat über $\gamma\delta$ ist gegeben, mithin auch das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \delta\eta$: Quadrat über $\gamma\delta$; folglich sind die beiden Punkte ϑ, η gegeben. Also liegt im ersten Falle der Punkt γ auf einer Ellipse, im zweiten Falle auf einer Hyperbel.

Die Synthesis des Ortes ist die folgende. Es seien die Punkte α, β gegeben und das gegebene Verhältniss von Quadrat über $\varrho\tau$

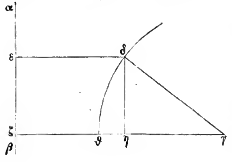


zu Quadrat über $\tau\sigma$ im ersten Falle des Grösseren zum Kleineren, im zweiten des Kleineren zum Grösseren. Es sei ferner $\varrho\tau = \tau\upsilon$, $\upsilon\sigma : \sigma\tau = \alpha\beta : \beta\eta$, $\varrho\tau : \tau\sigma = \alpha\vartheta : \vartheta\beta$. Man beschreibe nun um die Axe $\vartheta\eta$ im ersten Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel, so dass, wenn ein beliebiger Punkt γ auf derselben angenommen und die Senkrechte $\gamma\delta$ gefällt wird, das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\delta \,.\, \delta\eta$: Quadrat über $\delta\gamma$ aus $\tau\sigma : \sigma\upsilon$ und $\tau\sigma : \sigma\varrho$ und

Τούτον οὕτως ἐχόντων, ἐλευσόμεθα ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. ἔστω θέσει εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δοθὲν τὸ γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διήχθω ἡ δγ, κάθετος ἡ δε, λόγος δὲ ἔστω τῆς γδ πρὸς δε· λέγω ὅτι τὸ δ ἅπτεται κώνου τομῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὁ λόγος ᾖ ἴσος πρὸς ἴσον, παραβολὴ, ἐὰν δὲ ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἔλλειψις, ἐὰν δὲ μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ὑπερβολή. Ἔστω πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον, τουτέστιν ἔστω πρότερον ἴση ἡ γδ τῇ δε, δεῖξαι ὅτι τὸ δ ἅπτεται παραβολῆς. ἤχθω κάθετος ἡ γζ, θέσει ἄρα ἐστὶ, τῇ δὲ αβ παράλληλος ἡ δη. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ εδ ἴσον τῷ ἀπὸ δγ, ἴση δὲ ἡ μὲν εδ τῇ ζη, τὸ δὲ ἀπὸ δγ ἴσον τοῖς ἀπὸ δη, ηγ, τὸ ἄρα ἀπὸ ζη ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ δη, ηγ. καὶ ἔστι θέσει ἡ ζγ, καὶ δύο δοθέντα τὰ ζ, γ· τὸ δ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς· τοῦτο γὰρ προδέδεικται. Συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ τῇ θέσει ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ γ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ γζ. καὶ θέσει οὔσης τῆς γζ καὶ δύο δοθέντων τῶν ζ, γ, εὑρήσθω παραβολὴ ἡ δθ, ὥστε οἷον ἐὰν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ δ, ἀχθῇ δὲ κάθετος ἡ δη, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζη τοῖς ἀπὸ δη, ηγ· λέγω ὅτι ἡ δθ γραμμὴ [ποιεῖ] τὸν τόπον, τουτέστιν οἷα τίς ἐὰν διαχθῇ ὡς γδ, καὶ κάθετος ἡ δε, ἴση ἐστὶν ἡ γδ τῇ δε. ἤχθω

aus dem gegebenen Verhältniss von Quadrat über $\varrho\tau$: Quadrat über $\tau\sigma$ zusammengesetzt ist. Man fälle noch die Senkrechte $\beta\varkappa$, so wird $\vartheta\varkappa$ die Figur bilden. Denn fällt man die Senkrechte $\gamma\delta$ und ist $\alpha\beta : \beta\eta = \zeta\beta : \beta\delta$ und $\alpha\vartheta : \vartheta\beta = \varepsilon\delta : \delta\beta$, so ist $\delta\eta : \alpha\zeta = \eta\beta : \beta\alpha = \tau\sigma : \sigma\upsilon$, und $\vartheta\delta : \alpha\varepsilon = \tau\sigma : \sigma\varrho$, wie in der Analysis gezeigt ist. Mithin ist das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\delta . \delta\eta$: Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$ zusammengesetzt aus $\tau\sigma : \sigma\upsilon$ und $\tau\sigma : \sigma\varrho$; aber das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\delta . \delta\eta$: Quadrat über $\delta\gamma$ ist zusammengesetzt aus $\tau\sigma : \sigma\upsilon$ und $\tau\sigma : \sigma\varrho$ und aus Quadrat über $\varrho\tau$: Quadrat über $\tau\sigma$; ferner ist das Verhältniss von Rechteck $\vartheta\delta$ $\delta\eta$: Quadrat über $\delta\gamma$ zusammengesetzt aus Rechteck $\vartheta\delta . \delta\eta$: Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$ und Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$: Quadrat über $\delta\gamma$, und Rechteck $\vartheta\delta . \delta\eta$: Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$ aus $\tau\sigma : \sigma\upsilon$ und $\tau\sigma : \sigma\varrho$, folglich Rechteck $\zeta\alpha . \alpha\varepsilon$: Quadrat über $\delta\gamma$ = Quadrat über $\varrho\tau$: Quadrat über $\tau\sigma$ = Quadrat über $\varepsilon\delta$: Quadrat über $\delta\beta$. Demnach ist Quadrat über $\alpha\delta$: Quadrat über $\gamma\delta$ und über $\delta\beta$ = Quadrat über $\varrho\tau$: Quadrat über $\tau\sigma$, welches das gegebene Verhältniss ist, folglich bildet ein Theil des Schnittes $\vartheta\varkappa$ den Ort.

Nachdem dies dargethan, kehren wir zu dem zurück, was anfangs behauptet wurde. [*Command. CCXXXVIII.*] Es sei $\alpha\beta$ der Lage nach gegeben, und mit ihr in derselben Ebene der Punkt γ; zieht man $\delta\gamma$, fällt die Senkrechte $\delta\varepsilon$ und ist das Verhältniss von $\gamma\delta : \delta\varepsilon$ gegeben, so liegt der Punkt δ auf einem Kegelschnitt, und zwar wenn das Verhältniss ein Verhältniss der Gleichheit ist, auf einer Parabel, ist dasselbe ein Verhältniss des Kleineren zum Grösseren, auf einer Ellipse, und wenn es ein Verhältniss des Grösseren zum Kleineren, auf einer Hyperbel.



Es sei zuerst das gegebene Verhältniss ein Verhältniss der Gleichheit d. h. $\gamma\delta = \delta\varepsilon$, so ist zu zeigen, dass der Punkt δ auf einer Parabel liegt. Man fälle die Senkrechte $\gamma\zeta$, die also der Lage nach ge-

κάθετος ἡ δη. διὰ ἄρα τῆς παραβολῆς [τὸ] ἀπὸ ζη τοῖς ἀπὸ δη, ηγ, καὶ ἔστι τῇ μὲν ζη ἴση ἡ εδ, τοῖς δὲ ἀπὸ δη, ηγ ἴσον τὸ ἀπὸ δγ, τὸ ἄρα ἀπὸ δγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δε, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ γδ τῇ δε· ἡ ἄρα δϑ γραμμὴ τομὴν[1] *ποιεῖ τὸ τόπον*[2].

---

[1]) So die Hdsch., vielleicht zu lesen: *τομῆς μέρος*.

[2]) Es ist bereits von *Commandin* bemerkt, dass hiermit der letzte Satz nicht abgeschlossen ist; es fehlt das die Ellipse und Hyperbel Betreffende.

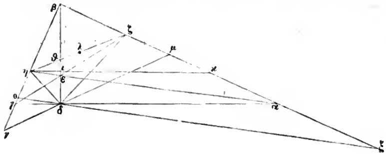
geben ist, und ziehe $\delta\eta \parallel \alpha\beta$. Da nun Quadrat über $\varepsilon\delta$ = Quadrat über $\delta\gamma$, aber $\varepsilon\delta = \zeta\eta$ und Quadrat über $\delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\eta$ + Quadrat über $\eta\gamma$, so ist Quadrat über $\zeta\eta$ = Quadrat über $\delta\eta$ + Quadrat über $\eta\gamma$. Nun ist $\gamma\zeta$ der Lage nach gegeben, demnach auch die beiden Punkte ζ, γ. Folglich liegt der Punkt δ auf einer Parabel, wie es im Vorhergehenden gezeigt ist.

Synthesis. Es sei $\alpha\beta$ der Lage nach gegeben und der Punkt γ. Man fälle die Senkrechte $\gamma\zeta$. Da nun $\gamma\zeta$ der Lage nach gegeben ist, so wie auch die beiden Punkte ζ, γ, so construire man die Parabel $\delta\vartheta$, so dass wenn irgend ein Punkt δ in ihr angenommen und die Senkrechte $\delta\eta$ gefällt wird, Quadrat über $\zeta\eta$ = Quadrat über $\delta\eta$ + Quadrat über $\eta\gamma$; alsdann wird die Linie $\delta\vartheta$ den Ort bilden, d. h. es ist, wenn irgend welche Linie $\gamma\delta$ gezogen und die Senkrechte $\delta\varepsilon$ gefällt wird, $\gamma\delta = \delta\varepsilon$. Man fälle die Senkrechte $\delta\eta$. Da nun wegen der Parabel Quadrat über $\zeta\eta$ = Quadrat über $\delta\eta$ + Quadrat $\eta\gamma$, $\zeta\eta = \varepsilon\delta$, und Quadrat über $\delta\eta$ + Quadrat über $\eta\gamma$ = Quadrat über $\delta\gamma$, so ist Quadrat über $\delta\gamma$ = Quadrat über $\delta\varepsilon$, folglich $\delta\gamma = \delta\varepsilon$; mithin bildet die Linie den Ort.

In allen von mir eingesehenen Handschriften findet sich am Schluss des siebenten Buches ein Lemma unter der Aufschrift: *Λῆμμα τοῦ ἀναλυομένου.* Es ist, vielleicht wegen des sehr verderbten Textes, von Commandin nicht übersetzt worden. Der Codex in der Ambrosiana (n. 266) enthält die Schlussformel des siebenten Buches vor diesem Lemma, in den übrigen geht das Lemma der Schlussformel voraus. Folgendes ist der Text desselben:

Λῆμμα τοῦ ἀναλυομένου.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ αζ πρὸς



τὴν ζβ καὶ ἡ βη πρὸς ηγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αεη, γεζ, βεδ· ὅτι ἡ βδ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν αγ. Ἐπεὶ ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως[1]) ἡ αζ πρὸς ζβ καὶ ἡ βη πρὸς ηγ, ὡς ἄρα ἡ αζ πρὸς βζ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ. συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ ζβ πρὸς ηγ· ἀλλ' ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς ηγ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ. ἴση ἄρα ἡ ζβ τῇ βη, ὥστε ἐπιζευχθείσης τῆς ζη, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζθ τῇ ὑπὸ βηθ ἐστὶν ἴση. καὶ μείζων ἡ ζθ εὐθεῖα τῆς θη· ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ η τῇ αγ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν

---

1) *οὕτως* fehlt fast überall.

ηκ, ἡ ὑπὸ βθη γωνία ταῖς ἀπεναντίον ὑπὸ θηι, θεη ἴση οὖσα, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ηθι, τουτέστι τῆς ζβθ ὀξείας, ὥστε καὶ λοιπὴν τὴν ὑπὸ ηβθ ἐλάσσονα γίνεσθαι τῆς ὑπὸ ζβθ. δίχα ἡ ζη τῷ λ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ λ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν λζ, λβ, λη γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ δ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ δζβη τετράπλευρον· τοῦτο γὰρ ἑξῆς· ἴση ἐστὶν ἡ βδζ γωνία τῇ ὑπὸ βδη, καὶ ἔστιν ἑκατέρα ἡμίσεια ὀρθῆς, καὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηζ, βζη ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ζδη. λέγω οὖν ὅτι ἡ ὑπὸ αδβ ὀρθή ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων ὀρθῆς. ἔστω πρότερον μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔστω ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βδμ, τῶν ηγ, μδ ἐκβληθεισῶν καὶ συμπιπτουσῶν κατὰ τὸ ν. ἐπεὶ οὖν τὸ μβδ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιόν ἐστι τῷ μβν τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, καί ἐστιν ἡμίσεια ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βδζ, ζδμ· ὡς ἄρα ἡ μζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ μδ πρὸς δβ, ἀλλ' ὡς ἡ μδ πρὸς δβ οὕτως ἡ μδ πρὸς δν, τουτέστιν ἡ βη πρὸς ην, δίχα γὰρ τέτμηται καὶ ἡ ὑπὸ βδν γωνία τῇ δη, ὡς ἄρα ἡ μζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ βη πρὸς ην. πάλιν ἐπεὶ ὡς ἡ αζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ ὑπόκειται, ἡ μζ ἄρα πρὸς ζβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βη πρὸς ην, ὅπερ ἀδύνατον, ἐδείχθη γὰρ ὡς ἡ μζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ βη πρὸς ην· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βδα γωνία. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αδβ, διὰ τοῦ δ τῇ δβ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγοντες τὴν δξο· ἔσται γὰρ πάλιν ὡς ἡ ξζ πρὸς ζθ οὕτως ἡ βη πρὸς ηο καὶ ἡ αζ πρὸς ζβ, πολλῷ ἐλάσσονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ἡ βη πρὸς ηγ, ὅπερ ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ.

Ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ αζ πρὸς ζβ καὶ ἡ βη πρὸς ηγ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ζβ τῇ βη. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ βη πρὸς ηγ, συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς βγ, τουτέστιν ὡς ἡ βη πρὸς ηγ οὕτως ἡ ζβ πρὸς ηγ, ἴση ἄρα ἡ ζβ τῇ βη.

Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴ ἡ β, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβ πρὸς βγ οὕτως ἡ αζ πρὸς ζβ καὶ ἡ βη πρὸς ηγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γεζ, αεη, βεδ· ὅτι ἡ βδ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν αγ. γεγονέτω· ὅμοια ἄρα τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα τῷ ὅλῳ αβγ

καὶ ἀλλήλοις, ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βγ, τουτέστιν ἡ αζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αδ πρὸς δβ· ἡ ἄρα ὑπὸ αδβ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ζδ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ζδβ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βδγ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς δη, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βδη· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζδη, ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβη. ἐν κύκλῳ ἄρα τὸ βδζη τετράπλευρον, καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ζδβ τῇ ὑπὸ βδη ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ζβ τῇ βη· ἔστι δὲ διὰ τὸ προδειχθέν.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Η.

Πάππου Ἀλεξανδρέως συναγωγῆς ὄγδοον, περιέχει δὲ μηχανικὰ προβλήματα σύμμικτα ἀνθηρά.

Τῶν ἐν τῷ βίῳ χρήσιμος ἡ μηχανικὴ θεωρία, τέκνον Ἑρμόδωρε, πρὸς πολλὰ καὶ μεγάλα ὑπάρχουσα, πλείστης εἰκότως ἀποδοχῆς ἠξίωται πρὸς τῶν φιλοσόφων καὶ πᾶσι τοῖς ἀπὸ τῶν μαθητῶν περισπούδαστός ἐστιν, ἐπειδὴ σχεδὸν πρώτη τῆς περὶ τὴν ὕλην τῶν ἐν τῷ κόσμῳ στοιχείων φυσιολογίας ἅπτεται. στάσεως γὰρ καὶ φορᾶς σωμάτων καὶ τῆς κατὰ τόπον κινήσεως ἐν τοῖς ὅλοις θεωρηματικὴ τυγχάνουσα, τὰ μὲν γινόμενα κατὰ φύσιν αἰτιολογεῖ, τὰ δ' ἀναγκάζουσα παρὰ φύσιν ἔξω τῶν οἰκείων τόπων εἰς ἐναντίας κινήσεις μεθίστησιν ἐπιμηχανωμένη διὰ τῶν ἐξ αὐτῆς τῆς ὕλης ὑποπιπτόντων αὐτῇ θεωρημάτων. τῆς δὲ μηχανικῆς τὸ μὲν εἶναι λογικόν, τὸ δὲ χειρουργικὸν οἱ περὶ τὸν Ἥρωνα μηχανικοὶ λέγουσι· καὶ τὸ μὲν λογικὸν συνεστάναι μέρος ἔκ τε γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς καὶ ἀστρονομίας καὶ τῶν φυσικῶν λόγων, τὸ δὲ χειρουργικὸν ἔκ τε χαλκευτικῆς καὶ οἰκοδομικῆς καὶ τεκτονικῆς καὶ ζωγραφικῆς καὶ τῆς ἐν τούτοις κατὰ χεῖρα ἀσκήσεως· τὸν μὲν ἐν ταῖς προειρημέναις τέχναις ἕξιν εἰληφότα, πρὸς δὲ τούτοις φύσιν εὐκίνητον ἔχοντα, κράτιστον ἔσεσθαι μηχανικῶν ἔργων εὑρετὴν καὶ ἀρχιτέκτονά φασι. μὴ δυνατοῦ ὄντος τὸν αὐτὸν μαθημάτων τε τοσούτων περιγενέσθαι καὶ μαθεῖν ἅμα τὰς προειρημένας τέχνας, παραγγέλλουσι τῷ τὰ μεχανικὰ ἔργα μεταχειρίζεσθαι βουλομένῳ χρῆσθαι ταῖς οἰκείαις τέχναις ὑποχειρίοις ἐν ταῖς παρ' ἕκαστα χρείαις. μάλιστα δὲ πάντων ἀναγκαιόταται τέχναι τυγχάνουσι πρὸς τὴν τοῦ βίου χρείαν, μηχανικὴ προηγουμένης ἀρχιτεκτονικῆς, ἥ τε τῶν μαγγαναρίων, μηχανικῶν καὶ αὐτῶν κατὰ τοὺς ἀρχαίους λεγομένων· μεγάλα γὰρ οὗτοι βάρη διὰ μηχα-

Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Achtes Buch, welches verschiedene interessante mechanische Probleme enthält.

Da die mechanische Wissenschaft, mein Sohn Hermodorus, für das Leben von Nutzen ist, indem sie für vieles Grosse die Grundlage bildet, so ist sie mit Recht von Seiten der Philosophen der zuvorkommendsten Aufnahme gewürdigt worden und alle Mathematik Beflissene verwenden grossen Fleiss auf sie, denn sie befasst sich hauptsächlich mit der Physiologie der Materie der Elemente, die in der Welt vorkommen. Indem sie nämlich über das Stehen und Gehen der Körper und über die Bewegung nach einem Orte hin allgemeine Lehrsätze aufstellt, sucht sie von den natürlichen Vorgängen den Grund auf, das Unnatürliche aber zwingt sie aus seiner eigenthümlichen Lage heraus und bringt es in entgegengesetzte Bewegung und zwar dadurch, dass sie mit Hülfe der aus derselben Materie sich ergebenden Lehrsätze die Mittel gewinnt. Hero und seine Schüler meinen, dass der eine Theil der Mechanik rational, der andere praktisch sei; der rationale bestehe aus Geometrie, Arithmetik, Astronomie und aus den physischen Wissenschaften, der praktische aus Erzbildnerkunst, Baukunst, Holzschneidekunst, Malerkunst und aus der Fertigkeit welche die Hand darin erlangt; der in den erwähnten Künsten eine Geschicklichkeit erreicht habe und dazu von erfinderischer Naturanlage sei, wäre vorzüglich geeignet mechanische Werke zu erfinden und zu bauen. Da es nicht möglich sei so viele Wissenschaften sich zu eigen zu machen und zugleich die erwähnten Künste zu erlernen, so rathen sie dem der sich mit mechanischen Werken befassen will, die geeigneten Künste zu treiben, die in den für ein jedes nöthigen Verrichtungen gebraucht werden. Vor allen

νῶν παρὰ φύσιν εἰς ὕψος ἀνάγουσιν ἐλάττονι δυνάμει κινοῦντες· καὶ ἡ τῶν ὀργανοποιῶν τῶν πρὸς τὸν πόλεμον ἀναγκαίων, καλουμένων δὲ καὶ αὐτῶν μηχανικῶν· βέλη γὰρ καὶ λίθους καὶ σίδηρα καὶ τὰ παραπλήσια τούτοις ἐξαποστέλλεται εἰς μακρὸν ὁδοῦ μῆκος τοῖς ὑπ᾽ αὐτῶν γινομένοις ὀργάνοις καταπελτικοῖς. πρὸς δὲ ταύταις ἡ τῶν ἰδίως πάλιν καλουμένων μηχανοποιῶν, ἐκ βάθους γὰρ πολλοῦ ὕδωρ εὐκολώτερον ἀνάγεται διὰ τῶν ἀντληματικῶν ὀργάνων, ὧν αὐτοὶ κατασκευάζουσι. καλοῦσι δὲ μηχανικοὺς οἱ παλαιοὶ καὶ τοὺς θαυμασιουργούς, ὧν οἱ μὲν διὰ πνευμάτων φιλοτεχνοῦσιν, ὡς Ἥρων πνευματικοῖς, οἱ δὲ διὰ νευρίων καὶ σπάρτων ἐμψύχων κινήσεις δοκοῦσι μιμεῖσθαι, ὡς Ἥρων αὐτομάτοις καὶ ζυγίοις, ἄλλοι δὲ διὰ τῶν ἐφ᾽ ὕδατος ὀχουμενῶν, ὡς Ἀρχιμήδης ὀχουμένοις, ἢ τῶν δι᾽ ὕδατος ὡρολογίων, ὡς Ἥρων ὑδρείοις, ἃ δὴ καὶ τῇ γνωμονικῇ θεωρίᾳ κοινωνοῦντα φαίνεται. μηχανικοὺς δὲ καλοῦσι καὶ τοὺς τὰς σφαιροποιΐας ποιεῖν ἐπισταμένους, ὑφ᾽ ὧν εἰκὼν τοῦ οὐρανοῦ κατασκευάζεται δι᾽ ὁμαλῆς καὶ ἐγκυκλίου κινήσεως ὕδατος. πάντων δὲ τούτων τὴν αἰτίαν καὶ τὸν λόγον ἐπεγνωκέναι φασί τινες τὸν Συρακούσιον Ἀρχιμήδην, μόνος γὰρ οὗτος ἐν τῷ καθ᾽ ἡμᾶς βίῳ ποικίλῃ πρὸς πάντα κέχρηται τῇ φύσει καὶ τῇ ἐπινοίᾳ, καθὼς καὶ Γεμῖνος ὁ μαθηματικὸς ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεώς φησιν. ὁ Καρπὸς δέ πού φησιν ὁ Ἀντιοχεὺς Ἀρχιμήδην τὸν Συρακούσιον ἓν μόνον βιβλίον συντεταχέναι μηχανικόν, τὸ κατὰ τὴν σφαιροποιΐαν, τῶν δὲ ἄλλων οὐδὲν ἠξιωκέναι συντάξαι· καί τοι παρὰ τοῖς πολλοῖς ἐπὶ μηχανικῆς δοξασθεὶς καὶ μεγαλοφυής τις γενόμενος ὁ θαυμαστὸς ἐκεῖνος, ὥστε διαμεῖναι [1]) παρὰ πᾶσιν ἀνθρώποις ὑπερβαλλόντως ὑμνούμενος. τῶν δὲ προηγουμένων γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς ἐχομένων θεωρίας καὶ τὰ βραχύτατα δοκοῦντα εἶναι σπουδαίως συνέγραφεν, ὡς φαίνεται τὰς εἰρημένας ἐπιστήμας οὕτως ἀγαπήσας, ὡς μηδὲν ἔξωθεν ὑπομένειν αὐταῖς ἐπεισάγειν. αὐτὸς δὲ Καρπὸς καὶ ἄλλοι τινὲς συνεχρήσαντο γεωμετρίᾳ καὶ εἰς τέχνας τινὰς εὐλόγως· γεωμετρία γὰρ οὐδὲν βλάπτεται σωματοποιεῖν πεφυκυῖα πολλὰς τέχνας διὰ τοῦ συνεῖναι αὐταῖς· μήτηρ οὖν ὥσπερ οὖσα τεχνῶν οὐ βλάπτεται διὰ τοῦ

---

[1]) Die Hdsch. hat *δαμεῖναι*

aber sind die am meisten nothwendigen Künste die, welche für den Bedarf des Lebens sorgen: die Baukunst, welche den andern vorangeht, die Kunst der Zauberer, die ebenfalls von den Alten Mechaniker genannt werden, denn diese heben grosse Lasten durch Maschinen auf unnatürliche Weise in die Höhe und zwar mittelst einer kleineren Kraft; die Kunst derer, die das zum Kriege Nothwendige zurüsten, welche auch Mechaniker heissen, denn Geschosse, Steine, Waffen und diesen ähnliches werden auf eine weite Strecke durch die von ihnen construirten Wurfmaschinen fortgeschleudert. Ausser diesen die Kunst derjenigen, die eigentlich Maschinenbauer genannt werden; aus grosser Tiefe nämlich wird Wasser durch Schöpfmaschinen, welche sie anfertigen, emporgehoben. Die Alten nennen auch die Gaukler Mechaniker, von denen die einen mittelst Luft ihre Kunst treiben, wie Hero in den πνευματικοῖς, die andern durch Sehnen und Stricke die Bewegungen Lebendiger nachzuahmen scheinen, wie Hero in den αὐτομάτοις καὶ ζυγίοις, noch andere durch Maschinen die vom Wasser bewegt werden, wie Archimedes in den ὀχουμένοις, oder durch Wasseruhren, wie Hero in den ὑδρείοις, die jedoch auch etwas aus der Gnomonik entlehnt zu haben scheinen. Mechaniker nennt man auch diejenigen, welche Kugeln zu machen verstehen, aus welchen ein Bild des Himmels mittelst einer gleichmässigen, kreisförmigen Wasserbewegung bereitet wird. Die Ursache von diesem allen und den Grund, sagt man, habe Archimedes aus Syrakus erkannt; er allein nämlich unter unsern Zeitgenossen — so bemerkt der Mathematiker Geminus in seinem Werke über die Reihenfolge der mathematischen Disciplinen — hat sich auf mannichfaltige Weise zu allen der Natur und des Nachdenkens bedient. Karpus aus Antiochien sagt irgendwo, dass der Syrakusaner Archimedes nur eine einzige mechanische Schrift, die über die Anfertigung von Globen, verfasst, von anderem aber nicht für werth gehalten habe etwas zusammenzustellen, und doch wurde er von den meisten in Betreff der Mechanik gepriesen, und wenn irgend einer wegen grosser geistiger Anlagen bewunderungswerth war, so war er es, so dass er unter allen Menschen überschwenglich gefeiert blieb. Er hat aber — und das ist diesem vorzuziehen — über Geometrie und Arithmetik, obwohl dem Anschein nach sehr kurz, fleissig gearbeitet, denn er liebte die erwähnten Wissenschaften offenbar so sehr dass er nicht duldete etwas Fremdes ihnen zuzuführen. Karpus

φροντίζειν ὀργανικῆς καὶ ἀρχιτεκτονικῆς· οὐδὲ γὰρ διὰ τὸ συνεῖναι γεωμετρίᾳ καὶ γνωμονικῇ καὶ μηχανικῇ καὶ σκηνογραφίᾳ βλάπτεταί τι, τοὐναντίον δὲ προάγουσα μὲν ταύτας φαίνεται, τιμωμένη δὲ καὶ κοσμουμένη δεόντως ὑπ' αὐτῶν. τοιαύτης δὲ τῆς μηχανικῆς ἐπιστήμης ὁμοῦ καὶ τέχνης ὑπαρχούσης καὶ εἰς τοσαῦτα μέρη διῃρημένης, καλῶς ἔχειν ἐνόμισα λόγῳ γεωμετρικῷ θεωρούμενα καὶ ἀναγκαιότατα περὶ τὴν τῶν βαρῶν κίνησιν, κείμενα δὲ παρὰ τοῖς παλαιοῖς καὶ τὰ ὑφ' ἡμῶν εὐχρήστως ἀνευρημένα θεωρήματα συντομώτερον καὶ σαφέστερον ἀναγράψας βελτίονί τε λόγῳ τοῦ παρὰ τοῖς πρότερον ἀναγεγραμμένου συντάξας, οἷον βάρους δοθέντος ὑπὸ δοθείσης ὑποδοχῆς ἀγομένου δυνάμεως ἐν τῷ παρὰ τὸν ὁρίζοντα ἐπιπέδῳ, καὶ ἑτέρου ἐπιπέδου κεκλιμένου πρὸς τὸ ὑποκείμενον δοθεῖσαν γωνίαν ὑποθέντος εὑρεῖν τὴν δύναμιν, ὑφ' ὅσης ἀχθήσεται τὸ βάρος ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ· τοῦτο δὲ χρήσιμον τοῖς μηχανικοῖς μαγγαναρίοις, προσθέντες γὰρ τῇ εὑρεθείσῃ δυνάμει ἑτέραν τινὰ δύναμιν ἀνδρῶν θυρσοῦντες ἀνάγουσι τὸ βάρος. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· διὰ γὰρ τοῦ θεωρήματος τούτου πᾶν τὸ δοθὲν στερεὸν σχῆμα κατὰ τὸν δοθέντα λόγον αὔξεταί τε καὶ μειοῦται. καὶ πῶς δυνατόν ἐστι τυμπάνου δοθέντος καὶ τὸ πλῆθος τῶν σκυτάλων αὐτοῦ δοθέντων ἢ ὀδόντων παραθῆναι αὐτῷ τύμπανον δοθὲν ἔχον τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων καὶ εὑρεῖν τὴν διάμετρον τοῦ παρατιθεμένου τυμπάνου· τοῦτο γὰρ χρήσιμον εἰς πολλὰ καὶ τῇ τῶν μηχανοποιῶν τέχνῃ διὰ τὴν παράδοσιν τῶν σκυταλωτῶν τυμπάνων. ἕκαστον δὲ τούτων ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ γενήσεται φανερὸν μετὰ καὶ ἄλλων χρησίμων ἀρχιτέκτονι καὶ μηχανικῷ, ἐὰν πρότερον τὰ συνέχοντα τὴν κεντροβαρικὴν πραγματείαν εἴπωμεν ἑξῆς. τί μὲν οὖν ἐστι τὸ βαρὺ καὶ τὸ κοῦφον, καὶ τίς αἰτία τῆς ἄνω καὶ κάτω τοῖς σώμασι φορᾶς, καὶ αὐτό γε τὸ ἄνω καὶ κάτω τίνος ἐννοίας ἔχεται, καὶ τίσιν ἀφώρισται πέρασιν, οὐδὲν δεῖ λέγεσθαι παρ' ἡμῶν τὸ νῦν, ἐπειδὴ περὶ τούτων ἐν τοῖς μαθηματικοῖς ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου δεδήλωται. τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους ἑκάστου σώματος, ὅ τῆς κεντροβαρικῆς πραγματείας ἀρχὴ καὶ στοιχεῖόν ἐστιν, ἐξ ἧς καὶ τὰ λοιπὰ μέρη τῆς μηχανικῆς ἀνήρτηται, τί ποτ' ἐστὶ καὶ τί βούλεται λεκτέον, ἐκ τούτου γὰρ οἶμαι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐν τῇ πραγματείᾳ θεωρουμένων ἔσται σαφῆ. λέγομεν δὲ κέντρον βάρους

aber und einige andere haben sich der Geometrie auch zu gewissen Künsten zweckmässig bedient; denn die Geometrie wird auf keine Weise verletzt, wenn sie viele Künste dadurch, dass sie sich mit ihnen verbindet, vergrössern hilft. Gewissermassen als Mutter der Künste wird sie nicht verletzt, dass sie für die Fabrication von Werkzeugen und für die Baukunst Sorge trägt, denn durch eine Verbindung der Geometrie und Gnomonik und Mechanik und Perspective leidet nichts Schaden, im Gegentheil sie erweitert offenbar jene Künste und wird von ihnen geehrt und nach Gebühr verherrlicht. Da nun solchergestalt die Mechanik zugleich Wissenschaft und Kunst ist und in so viele Theile zerfällt, so habe ich für gut gehalten, wenn ich die mit Hülle der Geometrie gewonnenen, nothwendigsten Theoreme über die Bewegung der schweren Körper, die in den Schriften der Alten vorhanden und die von unsern Zeitgenossen geschickt aufgefunden sind, kürzer und deutlicher niederschreibe und auf eine bessere Weise als es früher geschehen zusammenstelle, wie z. B. wenn eine gegebene Last von einer gegebenen Kraft auf einer zum Horizont parallelen Ebene bewegt wird und eine andere Ebene unter einem gegebenen Winkel gegen die erstere geneigt ist, die Kraft zu finden, durch welche die Last auf der geneigten Ebene bewegt wird; dies ist für die mechanischen Zauberer von Nutzen, indem sie nämlich der gefundenen Kraft eine andere menschliche Kraft hinzufügen, heben sie zuversichtlich die Last in die Höhe. Ferner wenn zwei ungleiche gerade Linien gegeben sind, zwei mittlere Proportionalen in stetiger Proportion zu finden; mit Hülfe dieses Theorems wird nämlich jede gegebene körperliche Figur nach einem gegebenen Verhältniss sowohl vergrössert als erkleinert. Ferner wie es möglich ist, wenn eine Scheibe und die Anzahl der Stöcke oder Zähne daran gegeben sind, mit derselben eine andere Scheibe mit einer gegebenen Anzahl von Zähnen zusammenzustellen und den Durchmesser der letzteren zu finden, was in vieler Hinsicht auch für die Kunst der Maschinisten von Nutzen ist wegen der Verbindung von Scheiben, die mit Triebstöcken versehen sind. Ein jedes von diesen wird an seinem Orte deutlich werden, zugleich mit anderm was für den Baumeister und Mechaniker nützlich ist, wenn wir vorher das was sich auf die Behandlung des Schwerpunktes bezieht, im Folgenden dargestellt haben. Was schwer und was leicht ist, welches die Ursache des Auf- und Niedersteigens der Körper ist, mit wel-

ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντός, ἀφ' οὗ κατ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠρεμεῖ φερόμενον καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν, οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον οὐ μόνον ἐν τοῖς τεταγμένοις, ἀλλὰ κἂν τοῖς ἀτάκτως ἐσχηματισμένοις εὑρίσκεται σώμασιν ὑπάρχον ἐφόδῳ τινὶ θεωρούμενον τοιαύτῃ· ὑποκείσθω γὰρ ἐπίπεδον ὀρθὸν τὸ αβγδ, νεῦον εἰς τὸ τοῦ παντὸς κέντρον, ἐφ' ὃ καὶ τὰ βάρος ἔχοντα πάντη τὴν ῥοπὴν ἔχειν δοκεῖ, καὶ ἔστω ἡ αβ εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἐφ' οὗ βεβήκαμεν ἐπιπέδῳ. ἐὰν δή τι τῶν βάρος ἐχόντων σωμάτων τεθῇ κατὰ τῆς αβ εὐθείας οὕτως, ὥστε τετμῆσθαι πάντως ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐκβαλλομένου, ἕξει ποτὲ θέσιν τοιαύτην, ὥστε μένειν ἀπερίτρεπτον καὶ μὴ ἀποπίπτειν. γενομένου δὲ τούτου, ἐὰν νοηθῇ τὸ αβγδ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον, τεμεῖ τὸ ἐπικείμενον σῶμα εἰς ἰσόῤῥοπα δύο μέρη, οἷον περὶ ἄρτημα τὸ ἐπίπεδον ἰσοῤῥοποῦντα. πάλιν δὴ τὸ βάρος μετατεθὲν ὥστε καθ' ἕτερον μέρος ψαύειν τῆς αβ εὐθείας, ἕξει ποτὲ θέσιν περιτρεπόμενον, ὥστε μένειν ἀφεθὲν καὶ μὴ ἀποπίπτειν. ἐὰν οὖν πάλιν νοηθῇ τὸ αβγδ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον, εἰς ἰσοῤῥοποῦντα μέρη τεμεῖ τὸ βάρος, καὶ συμπεσεῖται τῷ πρότερον ἰσόῤῥοπα τέμνοντα τὸ αὐτὸ βάρος ἐπιπέδῳ· εἰ γὰρ μὴ τεμεῖ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἰσόῤῥοπα καὶ ἀνισόῤῥοπα γενήσεται ἀλλήλοις.

cher Vorstellung dieses Hinauf und Herunter verknüpft ist, und welche Gränzen ihm angewiesen sind, darüber bedarf es jetzt von unserer Seite keiner Worte, da davon bereits Ptolomäus in seinen mathematischen Schriften gehandelt hat. Was aber der Schwerpunkt eines jeden Körpers, welches der Anfang und das Erste der Schwerpunktslehre ist, wovon auch die übrigen Theile der Mechanik abhängen, und was seine Bedeutung ist, darüber muss gehandelt werden, denn hieraus ergiebt sich nach meinem Dafürhalten auch deutlich das Uebrige, was in diesem Abschnitt behandelt wird. Wir nennen den Schwerpunkt eines jeden Körpers einen in ihm liegenden Punkt, so dass der schwere Körper, wenn er darin aufgehangen gedacht wird, in Ruhe bleibt, seine ursprüngliche Lage behält und sich nicht in schneller Bewegung dreht. Dieser Punkt ist nicht allein in den geordneten, sondern auch in den ohne alle Ordnung gebildeten Körpern vorhanden und wird folgendermassen gefunden. Es sei $\alpha\beta\gamma\delta$ [*Command. I.*]



eine senkrechte Ebene, die nach dem Mittelpunkt des Alls gerichtet ist, wohin auch alles Schwere überhaupt zu fallen scheint, und es sei die Gerade $\alpha\beta$ der Ebene auf welcher wir stehen parallel. Wenn nun ein schwerer Körper auf der Linie $\alpha\beta$ so gelegt wird, dass er von der erweiterten Ebene vollständig geschnitten wird, so wird er einmal eine solche Lage einnehmen, dass er unbeweglich bleibt und nicht fällt. Wenn nun unter dieser Voraussetzung die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ erweitert gedacht wird, so theilt sie den darauf liegenden Körper in zwei Theile von gleichem Gewicht, die zu beiden Seiten der Ebene wie an einem Aufhängepunkt gleichmässig schweben. Wird ferner die Lage des schweren Körpers verändert, so dass er von einer andern Seite die Linie $\alpha\beta$ trifft, so wird er einmal, nachdem er sich gedreht, eine Lage einnehmen, dass er losgelassen unverändert bleibt und nicht fällt. Wenn nun wiederum die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ erweitert gedacht wird, so theilt sie den schweren Körper in Theile von gleichem Gewicht und wird die vorher den Körper in gleichschwere Theile theilende Ebene treffen, denn träfe sie dieselbe nicht, so würden dieselben Theile sowohl gleich an Gewicht als nicht gleich an Gewicht sein.

Τούτων δὴ προειρημένων, νοείσθω πάλιν εὐθεῖα ἡ αβ ὀρθὴ πρὸς τὸ ἐφ᾽ οὗ βεβήκαμεν ἐπίπεδον, εἰς τὸ τοῦ παντὸς κέντρον δηλονότι νεύουσα, καὶ τὸ βάρος ὁμοίως ἐπὶ τοῦ α σημείου τιθέσθω, οἷον ὑποθέματι τῇ αβ εὐθείᾳ χρώμενον, στήσεται δήποτε κατα τοῦ α σημείου, ὥστε μένειν, εἴγε δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ δι᾽ αὐτῆς ἐπιπέδου τὸ βάρος ἠρεμεῖν ἐδύνατο. ἐὰν δὴ μένοντος αὐτοῦ ἐκβληθῇ ἡ αβ εὐθεῖα, ἐναποληφθήσεταί τι μέρος αὐτῆς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ σχήματι. νοείσθω δὴ τοῦτο μένον, καὶ πάλιν καθ᾽ ἕτερον μέρος ὑποκείσθω τῇ εὐθείᾳ τὸ βάρος ὥστε ἠρεμεῖν· λέγω δὴ ὅτι ἐκβληθεῖσα ἡ αβ εὐθεῖα συμπεσεῖται [1]) .... δυνήσεταί τινα δι᾽ ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐκβληθέντα ἐπίπεδα μὴ συμπεσόντα ἀλλήλοις ἐντὸς τοῦ σχήματος καὶ ἑκάτερον αὐτῶν ἐφαρμοζόμενον τῷ διὰ τῆς αβ ἐπιπέδῳ διελεῖν τὸ βάρος εἰς ἰσόῤῥοπα καὶ ἀνισόῤῥοπα τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἄτοπον. συμπεσοῦνται ἄρα αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι ἐντὸς τοῦ σχήματος. ὁμοίως δὲ κἂν κατ᾽ ἄλλας θέσεις τίθηται τὸ βάρος ἐπὶ τοῦ α σημείου, ὥστε μένειν, ἐκβληθεῖσα ἡ αβ συμπεσεῖται ταῖς πρότερον ἐναπειλημμέναις ὁμοίως εὐθείαις. ἐξ οὗ φανερὸν, ὡς καθ᾽ ἓν σημεῖον ἀλλήλας τεμοῦσιν αἱ τὸν εἰρημένον τρόπον ἐπινοούμεναι εὐθεῖαι. τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο κέντρον τοῦ βάρους καλεῖται, καὶ φανερὸν ὅτι ἐκ τοῦ κέντρου κατ᾽ ἐπίνοιαν τὸ βάρος ἀρτώμενον οὐ περιτραπήσεται, μένει δὲ τὴν ἐξ ἀρχῆς φυλάσσον ἥντινοῦν θέσιν ἐν τῇ φορᾷ· πάντα γὰρ δι᾽ αὐτοῦ ἐκβληθέντα ἐπίπεδα ἰσόῤῥοπα μέρη διαιρεῖ τὸ βάρος, ἔστι δὲ μηδεμίαν αἰτίαν ἐπιδέχεσθαι περιτροπῆς ἰσοῤῥόπων αὐτοῦ κατὰ πᾶσαν θέσιν τῶν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ σημείου γινομένων μερῶν.

---

[1]) Die Lücke die hier offenbar vorhanden ist, wird von der Hdsch. nicht angezeigt. Es scheint eine Zeile ausgefallen zu sein. In der Uebersetzung ist *Commandin's* Text aufgenommen.



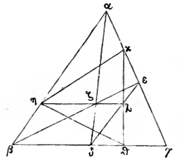
Nachdem dies vorausgeschickt, werde wiederum auf der Ebene, auf der wir stehen, die Gerade $\alpha\beta$ senkrecht gedacht, die alsdann offenbar nach dem Mittelpunkt des Alls gerichtet ist, und auf ähnliche Weise werde der schwere Körper auf den Punkt α gelegt, indem er sich der Geraden $\alpha\beta$ wie einer Stütze bedient, so wird er irgend einmal auf dem Punkte α ruhen, so dass er unverändert seine Lage behält, wenigstens wenn der schwere Körper auch auf der durch sie gelegten Ebene ruhen konnte. Wenn nun, indem derselbe ruhig seine Lage behält, die Gerade $\alpha\beta$ verlängert wird, so wird ein Theil derselben in der vorliegenden Figur enthalten sein. Es behalte dieselbe ihre Lage unverändert, und wiederum liege der schwere Körper auf einer andern Seite auf der Geraden so dass er sich nicht bewegt, so wird die Gerade $\alpha\beta$ in ihrer Verlängerung auf die frühere in der Figur enthaltene treffen. Wäre dies nicht der Fall, so werden die durch sie beide gelegten Ebenen in ihrer Erweiterung innerhalb der Figur nicht zusammentreffen können, und eine jede derselben theilt den schweren Körper in dieselben Theile von gleichem und von ungleichem Gewicht, was absurd ist. Mithin werden die erwähnten Geraden innerhalb der Figur sich schneiden. Auf ähnliche Weise wird, auch wenn der schwere Körper in andern Lagen auf den Punkt α gelegt wird, so dass er ruht, die verlängerte $\alpha\beta$ mit den früheren auf ähnliche Weise angenommenen Geraden zusammentreffen. Hieraus folgt, dass die auf diese Weise angenommenen Linien sich in einem einzigen Punkte schneiden. Dieser Punkt wird der Schwerpunkt genannt, und es ist klar, dass der schwere Körper, wenn man ihn im Schwerpunkt aufgehangen sich denkt, sich nicht drehen wird; er ruht vielmehr, indem er seine anfängliche Lage, welche sie auch in der Bewegung sein mochte, beibehält, denn alle durch denselben gelegte Ebenen theilen den schweren Körper in Theile von gleichem Gewicht, und eine Ursache zur Drehung kann gar nicht angenommen werden, da in jeder Lage des Körpers die auf jeder Seite des Punktes liegenden Theile von gleichem Gewicht sind.

Τὸ μὲν οὖν μάλιστα συνέχον τὴν κεντροβαρικὴν πραγματείαν, τοῦτ' ἂν εἴη· μάθοις δ' ἂν τὰ μὲν στοιχειώδη ὄντα διὰ ταύτης δεικνύμενα τοῖς Ἀρχιμήδους περὶ ἰσοῤῥοπιῶν ἐντυχὼν καὶ τοῖς Ἥρωνος μηχανικοῖς. ὅσα δὲ μὴ γνώριμα τοῖς πολλοῖς, γράψομεν ἐφεξῆς· οἷον τὰ τοιαῦτα. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τεμνέσθωσαν τοῖς η, θ. κ σημείοις, ὥστε εἶναι ὡς τὴν αη πρὸς ηβ [οὕτω] τὴν θβ πρὸς θγ καὶ τὴν γκ πρὸς κλ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ, θκ, κη· ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου καὶ τοῦ ηθκ τὸ αὐτὸ κέντρον βάρεός ἐστιν. . . . . . .[1]) τοῦ αβγ τριγώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τρίγωνον ἐπί τινος ὀρθοῦ ἐπιπέδου ἐπισταθῇ κατὰ τὴν αδ εὐθεῖαν, ἐπ' οὐδέτερον μέρος ῥέψει τὸ τρίγωνον, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ αβδ τρίγωνον τῷ αγδ τριγώνῳ. ἐπισταθὲν δὲ ὁμοίως τὸ αβγ τρίγωνον κατὰ τὴν βε ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἐπιπέδου, ἐπ' οὐδέτερον μέρος ῥέψει. διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ αβε, βγε τρίγωνα. εἰ δὲ ἐφ' ἑκατέρᾳ τῶν αδ, βε ἰσοῤῥεπεῖ τὸ τρίγωνον, τὸ ἄρα κοινὸν αὐτῶν σημεῖον τὸ ζ κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος· νοεῖν δὲ δεῖ τὸ ζ, ὡς προείρηται, κείμενον ἐν μέσῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἰσοπαχοῦς τε καὶ ἰσοβαροῦς δηλονότι ὑποκειμένου. καὶ φανερὸν ὅτι διπλασία ἐστὶν ἡ μὲν αζ τῆς ζδ, ἡ δὲ ζβ τῆς ζε, ὅτι καὶ ὡς ἡ γα πρὸς αε οὕτως ἡ αβ πρὸς δε καὶ ἡ βζ πρὸς ζε καὶ ἡ αζ πρὸς ζδ, διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι καὶ τὰ δζε, αβζ τρίγωνα καὶ τὰ γδε, αβγ. ἐπιζευχθεῖσα οὖν ἡ δε τεμνέτω τὴν θκ κατὰ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς βδ πρὸς θγ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς θβ πρὸς δθ καὶ τοῦ τῆς δθ πρὸς θγ, καὶ ἔστι συνθέντι ὡς ἡ βγ πρὸς γθ [οὕτως] ἡ γα πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση ὡς ἡ γδ πρὸς γθ [οὕτως] ἡ εα πρὸς ακ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ γδ πρὸς δθ [οὕτως] ἡ αε πρὸς εκ, ἴση δὲ ἡ μὲν γδ τῇ βδ, ἡ δὲ αε τῇ γε· καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δθ οὕτως ἡ γε πρὸς εκ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θδ οὕτως ἡ γκ πρὸς κε. σύγκειται ἄρα καὶ τῆς αη πρὸς ηβ λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς γκ πρὸς κε καὶ τοῦ τῆς δθ πρὸς θγ, σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τῆς δλ πρὸς λε, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ θλ τῇ λκ, ὡς δειχθήσεται· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αη πρὸς ηβ οὕτως ἡ δλ πρὸς λε. καὶ εἰσὶν παράλληλοι αἱ αβ. δε, καὶ ἐπιζευγνύμεναι αἱ αδ. βε τέμνουσι ἀλλήλας κατὰ τὸ ζ·

---

[1]) Die H-Sch. zeigt hier keine Lücke; offenbar ist aber eine Zeile ausgefallen. In der Uebersetzung ist *Commandin's* Text aufgenommen.

Das wäre das Hauptsächlichste in Betreff der Behandlung des Schwerpunktes, und du dürftest nun das Elementare, das dadurch in den Schriften Archimed's über das Gleichgewicht und in den mechanischen Schriften Hero's bewiesen wird, verstehen. Was den meisten nicht bekannt ist, werden wir der Reihe nach darlegen, z. B. Folgendes. Werden die Seiten [*Command. II.*] eines Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ nach demselben Verhältniss in den Punkten $\eta, \vartheta, \varkappa$ getheilt, so dass $\alpha\eta : \eta\beta = \vartheta\beta : \vartheta\gamma = \gamma\varkappa : \varkappa\lambda$, und die Geraden $\eta\vartheta, \vartheta\varkappa, \varkappa\eta$ gezogen, so haben die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\eta\vartheta\varkappa$ denselben Schwerpunkt. Man halbire $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ in den Punkten δ, ε und ziehe $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, so ist der Punkt ζ, in welchem sie sich schneiden, der Schwerpunkt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$. Wird nämlich das Dreieck längs der Geraden $\alpha\delta$ auf eine senkrechte Ebene gelegt, so wird es sich nach keiner Seite hin neigen, weil $\triangle\ \alpha\beta\delta = \triangle\ \alpha\gamma\delta$. Wird auf ähnliche Weise das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ längs der Linie $\beta\varepsilon$ auf eine senkrechte Ebene gelegt, so wird es ebenfalls nach keiner Seite hin sich neigen, weil $\triangle\ \alpha\beta\varepsilon = \triangle\ \beta\gamma\varepsilon$. Wenn aber auf jeder der Linien $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$ das Dreieck im Zustand des Gleichgewichts ist, so wird der ihnen gemeinschaftliche Punkt ζ der Schwerpunkt sein. Wie oben erwähnt ist, muss man sich diesen Punkt ζ mitten im Dreieck $\alpha\beta\gamma$ liegend vorstellen, das, wie sich von selbst versteht, gleichmässig dick und gleichmässig schwer vorausgesetzt wird. Offenbar ist nun $\alpha\zeta = 2\,\zeta\delta$, $\zeta\beta = 2\,\zeta\varepsilon$, ferner $\gamma\alpha : \alpha\varepsilon = \alpha\beta : \delta\varepsilon = \beta\zeta : \zeta\varepsilon = \alpha\zeta : \zeta\delta$, weil die Dreiecke $\delta\zeta\varepsilon$, $\alpha\beta\zeta$ und $\gamma\delta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ gleichwinklig sind. Es schneide nun die Linie $\delta\varepsilon$ die $\vartheta\varkappa$ im Punkte λ. Da das Verhältniss $\beta\vartheta : \vartheta\gamma$ aus $\vartheta\beta : \delta\vartheta$ und $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$ zusammengesetzt ist, und durch Zusammenfassen $\beta\gamma : \gamma\vartheta = \gamma\alpha : \alpha\varkappa$, ferner durch Halbirung der Vorderglieder $\gamma\delta : \gamma\vartheta = \varepsilon\alpha : \alpha\varkappa$ und durch Differenz $\gamma\delta : \delta\vartheta = \alpha\varepsilon : \varepsilon\varkappa$, und da $\gamma\delta = \beta\delta$, $\alpha\varepsilon = \gamma\varepsilon$, so ist $\beta\delta : \delta\vartheta = \gamma\varepsilon : \varepsilon\varkappa$,

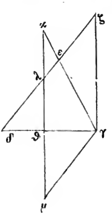


εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν η, ζ, λ, καὶ τοῦτο γὰρ ἑξῆς εἰ μικρόν ἐσιιν. καὶ ἐπεί ἐσιιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζε οὕτως ἡ ηζ πρὸς ζλ, διπλῆ δὲ ἡ βζ τῆς ζε, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ηζ τῆς ζλ. τριγώνου δὴ τοῦ ηθκ διχοτομία τὸ λ, καὶ διπλῆ ἡ ηζ τῆς ζλ, τὸ ζ ἄρα κέντρον [τοῦ βάρους] ἐστὶν τοῦ ηθκ τριγώνου. ἦν δὲ καὶ τοῦ αβγ.

Τὸ δὲ ὑπερτεθὲν νῦν δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ὡς ἡ γδ πρὸς δθ οὕτως ἡ γε πρὸς εκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, θκ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ λ· ὅτι ἴση μέν ἐστιν ἡ θλ τῇ κλ, ὁ δὲ τῆς δλ πρὸς λε λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς δθ πρὸς θγ καὶ τοῦ τῆς γκ πρὸς κε. [Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ τῇ θκ παράλληλος ἡ γζ συμπίπτουσα τῇ δε] ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαί εἰσιν αἱ [δλ, λε ἔξωθεν τῆς λζ λαμβανομένης, ὁ τῆς] δλ πρὸς λε λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς δλ πρὸς λζ καὶ τοῦ τῆς λζ πρὸς ελ· ἀλλὰ τῷ μὲν δλ πρὸς λζ λόγῳ ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τῆς δθ πρὸς θγ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν γζ τῇ κθ, τῷ δὲ τῆς ζλ πρὸς λε λόγῳ ὁ αὐτός ἐστι ὁ τῆς γκ πρὸς κε, διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ γεζ, εκλ τρίγωνα, καὶ ὁ τῆς δλ ἄρα πρὸς τὴν λε λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς δθ πρὸς θγ καὶ ἐκ τοῦ τῆς γκ πρὸς κε. κατὰ τάδε δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ τῆς κλ πρὸς λθ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς κε πρὸς εγ καὶ τοῦ τῆς γδ πρὸς δθ, παραλλήλου ἀχθείσης τῇ εδ διὰ τοῦ γ τῆς γμ καὶ συμπιπτούσης τῇ κθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν δύο εὐθεῖαί εἰσιν αἱ κλ, λθ ἔξωθεν τῆς λμ λαμβανομένης, [ὁ τῆς κλ πρὸς λθ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ] τῆς κλ πρὸς λμ καὶ τοῦ τῆς λμ πρὸς λθ· ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῆς κλ πρὸς λμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κε πρὸς εγ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι πάλιν τὴν εδ τῇ γμ, ὁ δὲ τῆς λμ πρὸς λθ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς γδ πρὸς δθ, διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ δθλ, γθμ τρίγωνα· ὁ ἄρα τῆς κλ πρὸς λθ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς κε πρὸς εγ, τουτέστι τοῦ τῆς δθ πρὸς δγ, καὶ τοῦ τῆς γδ πρὸς τὴν δθ, ὃς λόγος τὸν τῆς ἰσότητος λόγον ποιεῖ· καὶ ὁ τῆς κλ ἄρα πρὸς τὴν λθ λόγος τῆς ἰσότητός ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ κλ τῇ λθ.

mithin durch Zusammenfassen $\beta\vartheta : \vartheta\delta = \gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon$. Demnach ist auch das Verhältniss $\alpha\eta : \eta\beta$ aus $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon$ und $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$ zusammengesetzt; aus denselben Verhältnissen besteht aber das Verhältniss $\delta\lambda : \lambda\varepsilon$ und es ist $\vartheta\lambda = \lambda\varkappa$, wie nachgewiesen werden wird, folglich $\alpha\eta : \eta\beta = \delta\lambda : \lambda\varepsilon$. Nun sind $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$ parallel, und $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$ schneiden sich im Punkte ζ, daher liegen die Punkte η, ζ, λ in einer geraden Linie; auch dies, obwohl es ohne Schwierigkeit ist, wird unten nachgewiesen werden. Da also $\beta\zeta : \zeta\varepsilon = \eta\zeta : \zeta\lambda$, und $\beta\zeta = 2\ \zeta\varepsilon$, so ist auch $\eta\zeta = 2\ \zeta\lambda$. Aber die Halbirung des Dreiecks $\eta\vartheta\varkappa$ geht vom Punkte λ aus, und da $\eta\zeta = 2\ \zeta\lambda$, so ist ζ der Schwerpunkt des Dreiecks $\eta\vartheta\varkappa$, der auch, wie ohen gezeigt ist, den Schwerpunkt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ bildet.

Es soll jetzt dargethan werden, was [*Command. III.*] oben angenommen ist. Ist nämlich $\gamma\delta : \delta\vartheta = \gamma\varepsilon : \varepsilon\varkappa$, und zieht man $\delta\varepsilon$, $\vartheta\varkappa$ die einander im Punkte λ schneiden, so ist $\vartheta\lambda = \varkappa\lambda$, und das Verhältniss $\delta\lambda : \lambda\varepsilon$ ist aus $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$ und $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon$ zusammengesetzt.

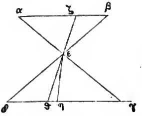


Man ziehe durch γ zu $\vartheta\varkappa$ die Parallele $\gamma\zeta$, welche die verlängerte $\delta\varepsilon$ im Punkte ζ schneidet. Da die beiden Geraden $\delta\lambda$, $\lambda\varepsilon$ nach $\lambda\zeta$ verlängert sind, so besteht das Verhältniss $\delta\lambda : \lambda\varepsilon$ aus $\delta\lambda : \lambda\zeta$ und $\lambda\zeta : \varepsilon\lambda$; aber $\delta\lambda : \lambda\zeta = \delta\vartheta : \vartheta\gamma$, weil $\gamma\zeta \parallel \varkappa\vartheta$, und $\zeta\lambda : \varepsilon\lambda = \gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon$, weil die Dreiecke $\gamma\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\varkappa\lambda$ gleichwinklig sind; mithin ist das Verhältniss $\delta\lambda : \lambda\varepsilon$ aus $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$ und $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon$ zusammengesetzt. Auf dieselbe Weise wird gezeigt, wenn man durch γ zu $\varepsilon\delta$ die Parallele $\gamma\mu$ zieht, welche die verlängerte $\varkappa\vartheta$ im Punkte μ schneidet, dass das Verhältniss $\varkappa\lambda : \lambda\vartheta$ aus $\varkappa\varepsilon : \varepsilon\gamma$ und $\gamma\delta : \delta\vartheta$ zusammengesetzt ist. Da nämlich die beiden Geraden $\varkappa\lambda$, $\lambda\vartheta$ nach $\lambda\mu$ verlängert sind, so besteht das Verhältniss $\varkappa\lambda : \lambda\vartheta$ aus $\varkappa\lambda : \lambda\mu$ und $\lambda\mu : \lambda\vartheta$; aber $\varkappa\lambda : \lambda\mu = \varkappa\varepsilon : \varepsilon\gamma$, weil $\varepsilon\delta \parallel \gamma\mu$, und $\lambda\mu : \lambda\vartheta = \gamma\delta : \delta\vartheta$, weil die Dreiecke $\delta\vartheta\lambda$, $\gamma\vartheta\mu$ gleichwinklig sind; demnach ist das Verhältniss $\varkappa\lambda : \lambda\vartheta$ aus $\varkappa\varepsilon : \varepsilon\gamma$ (d. h. $\delta\vartheta : \vartheta\gamma$) und $\gamma\delta : \delta\vartheta$ zusammengesetzt, welches Verhältniss ein Verhältniss der Gleichheit ist. Daher ist auch $\varkappa\lambda : \lambda\vartheta$ ein Verhältniss der Gleichheit, mithin $\varkappa\lambda = \lambda\vartheta$.

Τὸ λοιπὸν τῶν ὑπερτεθέντων. ἔστω παράλληλος ἡ αβ τῇ γδ, καὶ ὡς ἡ αζ πρὸς ζβ οὕτως ἡ γθ πρὸς θδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον· ὅτι ἡ διὰ τῶν ζ, ε, θ εὐθεῖά ἐστιν. Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ διὰ τῶν ζ, ε, η. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αζ πρὸς γη οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, ὡς δὲ ἡ ζε πρὸς εη οὕτως ἡ ζβ πρὸς ηδ· ὡς ἄρα ἡ αζ πρὸς γη οὕτως ἡ ζβ πρὸς βδ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αζ πρὸς ζβ, τουτέστιν ὡς ἡ γθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηδ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ ἄρα διὰ τῶν ζ, ε, θ σημείων εὐθεῖά ἐστιν.

Παραλληλογράμμου δοθέντος ὀρθογωνίου τοῦ αγ, διαγαγεῖν τὴν δγ, ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου ἀρτηθέντος ἀπὸ τοῦ δ, τὰς αδ, βγ παραλλήλους εἶναι τῷ ὁρίζοντι. Γεγονέτω· ἡ ἄρα διὰ τοῦ δ καὶ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ τραπεζίου ἀγομένη εὐθεῖα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ ἐπὶ τὴν βγ. ἔστω ἡ δλ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ δλ κατὰ τὸ ε καὶ [ἡ αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε], ἐπεζεύχθω δὲ ἡ γε καὶ τετμήσθω ἡ γε κατὰ τὸ θ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν γθ τῆς θε, καὶ ἡ εζ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ η καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ τέμνουσα τὴν δλ κατὰ τὸ κ. τὸ μὲν ἄρα η κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ βδ παραλληλογράμμου, τὸ δὲ θ κέντρον βάρους τοῦ γδλ τριγώνου· τοῦ ἄρα ὅλου τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ηθ ἐστιν· ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῆς δλ, τὸ κ ἄρα κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγδ τραπεζίου. ἀλλὰ καὶ τοῦ μὲν βδ παραλληλογράμμου τὸ η, τοῦ δὲ δλγ τριγώνου τὸ θ, ἔστιν ἄρ᾽ ὡς τὸ βδ παραλληλόγραμμον [πρὸς τὸ δλγ τρίγωνον οὕτως ἡ θκ] πρὸς τὴν κη.· ἐὰν γὰρ ἀνάπαλιν ἐπινοήσωμεν τοῦ μὲν βδ παραλληλογράμμου οὕτως ἔχον τὸ βάρος ἐν ἑαυτῷ πᾶν συνῆχθαι πρὸς τὸ η, τοῦ δὲ δλγ τριγώνου πᾶν τὸ βάρος ἐν τῷ θ συνῆχθαι, γίνεται ὥσπερ ζυγὸς ἡ ηθ, ἐκ δὲ τῶν ἄκρων τὰ εἰρημένα βάρη· καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ ηθ κατὰ τὸ κ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ πρὸς τῷ η βάρος πρὸς τὸ πρὸς τῷ θ, τουτέστι τὸ βδ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γδλ τρίγωνον, οὕτω τὴν θκ εὐθεῖαν πρὸς τὴν κη, κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα τῶν βαρῶν ἐν τοῖς ζυγοῖς λόγον, ἔσται τὸ κ σημεῖον, ἐξ οὗ τὰ βάρη ἰσορροπήσει, ὥστε

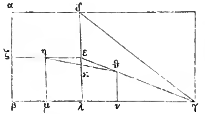
Ausserdem ist oben noch folgendes [*Command. IV.*] angenommen worden. Ist $\alpha\beta \parallel \gamma\vartheta$ und $\alpha\zeta : \zeta\beta = \gamma\vartheta : \vartheta\delta$, und zieht man $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ welche sich im Punkte ε schneiden, so liegen die Punkte ζ, ε, ϑ in einer geraden Linie.



Ist dies nicht der Fall, so mögen die Punkte ζ, ε, η in einer geraden Linie liegen. Da nun $\alpha\zeta : \gamma\eta = \zeta\varepsilon : \varepsilon\eta$ und $\zeta\varepsilon : \varepsilon\eta = \zeta\beta : \eta\delta$, so ist $\alpha\zeta : \gamma\eta = \zeta\beta : \eta\delta$ und verwechselt $\alpha\zeta : \zeta\beta$ (d. h. $\gamma\vartheta : \vartheta\delta$) $= \gamma\eta : \eta\delta$, was unmöglich ist. Mithin wird die durch ζ, ε, ϑ gehende Linie eine gerade sein.

Durch das gegebene rechtwinklige Parallelogramm $\alpha\gamma$ eine Gerade $\delta\gamma$ zu ziehen, dass wenn das Paralleltrapez $\alpha\beta\gamma\delta$ im Punkte δ aufgehangen wird, die Seiten $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ dem Horizonte parallel sind. [*Command. V.*]

Es sei geschehen. Alsdann ist die Gerade, welche durch δ und den Schwerpunkt des Trapezes gezogen wird, auf dem Horizonte und auf $\beta\gamma$ senkrecht. Sie sei $\delta\lambda$, welche in ε halbirt wird; ebenso halbire man $\alpha\beta$ in ζ und ziehe $\zeta\varepsilon$; ferner ziehe man $\gamma\varepsilon$ und theile sie in ϑ, so dass



$\gamma\vartheta = 2\,\vartheta\varepsilon$, halbire $\varepsilon\zeta$ in η und ziehe $\eta\vartheta$, welche $\delta\lambda$ in $\varkappa$ schneidet. Demnach ist η der Schwerpunkt des Parallelogramms $\beta\delta$ und ϑ der Schwerpunkt des Dreiecks $\gamma\delta\lambda$; mithin liegt der Schwerpunkt des ganzen Trapezes auf der Linie $\eta\vartheta$. Aber er liegt auch auf $\delta\lambda$, mithin ist $\varkappa$ der Schwerpunkt des Trapezes $\alpha\beta\gamma\delta$. Da nun η der Schwerpunkt des Parallelogramms $\beta\delta$ und ϑ der des Dreiecks $\delta\lambda\gamma$, so ist

$$⧺\ \beta\delta : \triangle\ \delta\lambda\gamma = \vartheta\varkappa : \varkappa\eta.$$

Denken wir uns nämlich die ganze Schwere des Parallelogramms $\beta\delta$ in η vereinigt, ebenso die des Dreiecks $\delta\lambda\gamma$ in ϑ, so ist $\eta\vartheta$ einem Wagebalken zu vergleichen, an dessen Enden die erwähnten Lasten sich befinden. Wird nun $\eta\vartheta$ in $\varkappa$ so getheilt,

καὶ τὸ αβγδ ἐκ τοῦ κ ἰσοῤῥοπήσει. ἤχθωσαν δὴ κάθετοι ἀπὸ τῶν η, θ ἐπὶ τὴν βγ αἱ ημ, θν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ βδ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γδλ τρίγωνον οὕτως ἡ θκ πρὸς τὴν κη· ἀλλ' ὡς τὸ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ τρίγωνον οὕτως ἡ βλ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς λγ, ὡς δὲ ἡ κθ πρὸς τὴν κη οὕτως ἡ νλ πρὸς τὴν λμ, διὰ τὸ εἰς παραλλήλους τὰς ημ, ελ, θν διῆχθαι τὰς ηκθ, μλν, καὶ ὡς ἄρα ἡ βλ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς λγ οὕτως ἡ νλ πρὸς τὴν λμ, ἡμίσειαν οὖσαν τῆς [βλ. ὡς ἄρα ἡ βλ πρὸς τὴν λγ] [1]) οὕτως ἡ νλ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς μλ, τουτέστι τὴν βλ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γλν. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ γλ πρὸς λβ οὕτως ἡ βλ πρὸς λν, ὡς δὲ ἡ γλ πρὸς λν οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γλ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βλ τετράγωνον, καὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ γλ τῆς λν, ἐπεὶ γὰρ ἡ γε τριπλῆ ἐστι τῆς εθ, διπλῆ γὰρ ἡ γθ τῆς εθ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ γλ τοῦ ἀπὸ λβ. καὶ δοθέντα τὰ β, γ, δοθὲν ἄρα τὸ λ, ὥστε καὶ τὸ δ. διὸ δὴ τὴν βγ τεμόντες κατὰ τὸ λ, ὥστε τὸ ἀπὸ γλ τοῦ ἀπὸ λβ εἶναι τριπλάσιον, ἕξωμεν τὸ δ τῆς ἀρτήσεως σημεῖον. [τμηθήσεται] δὲ ἡ βγ οὕτως.

Εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος εἶναι δυνάμει τριπλασίαν. Ἔστω εὐθεῖα ἡ αδ καὶ τετμήσθω [κατὰ] τὸ γ, ὥστε τὴν αγ τῆς γδ εἶναι τριπλῆν, καὶ ἐπὶ τῆς αδ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ αβδ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ αδ ἀπὸ τοῦ γ ἡ βγ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ αγ πρὸς γβ οὕτως ἡ αε πρὸς δε· ὅτι ἡ αε τῆς δε δυνάμει τριπλασία ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ βγ τῶν αγ, γδ μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς τὴν γδ οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αε πρὸς τὸ ἀπὸ δε, τριπλάσιον ἄρα ἡ αε τῆς δε δυνάμει. ὁμοίως καὶ εἰς τὸν δοθέντα λόγον δυνάμει τμηθήσεται ἡ αδ εὐθεῖα, καὶ πᾶσα ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα.

---

[1]) Die Handschrift ist hier lückenhaft.

dass die Last in η zu der in ϑ (d. h. $\#\ \beta\delta : \triangle\ \gamma\delta\lambda) = \vartheta\varkappa : \varkappa\eta$ d. h. nach dem entgegengesetzten Verhältniss der an dem Wagebalken befindlichen Lasten, so wird $\varkappa$ der Punkt sein, von welchem aus die Lasten im Gleichgewicht sind, so dass also auch das Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ im Punkte $\varkappa$ im Gleichgewicht ist. Man fälle nun von η, ϑ auf $\beta\gamma$ die Senkrechten $\eta\mu$, $\vartheta\nu$. Da

$\#\ \beta\delta : \triangle\ \gamma\delta\lambda = \vartheta\varkappa : \varkappa\eta$,

aber $\#\ \beta\delta : \triangle\ \gamma\delta\lambda = \beta\eta : \frac{1}{2}\lambda\gamma$,

und $\varkappa\vartheta : \varkappa\eta = \nu\lambda : \lambda\mu$, da die Parallelen $\eta\mu$, $\varepsilon\lambda$, $\vartheta\nu$ von $\eta\varkappa\vartheta$, $\mu\lambda\nu$ durchschnitten werden,

so ist $\beta\lambda : \frac{1}{2}\lambda\gamma = \nu\lambda : \lambda\mu\ (= \frac{1}{2}\beta\lambda)$.

Daher auch $\beta\lambda : \lambda\gamma = \nu\lambda : 2\lambda\mu\ (= \beta\lambda)$,

mithin Quadrat über $\beta\lambda$ = Rechteck $\gamma\lambda \,.\, \lambda\nu$.

Demnach ist $\gamma\lambda : \lambda\beta = \beta\lambda : \lambda\nu$,

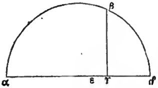
aber $\gamma\lambda : \lambda\nu$ = Quadrat über $\gamma\lambda$: Quadrat über $\beta\lambda$,

und da $\gamma\lambda = 3\,\lambda\nu$, weil $\gamma\varepsilon = 3\,\varepsilon\vartheta$,

so ist Quadrat über $\gamma\lambda$ = 3 Quadrat über $\beta\lambda$.

Nun sind die Punkte β, γ gegeben, mithin auch der Punkt λ, daher auch der Punkt δ. Wird demnach $\beta\gamma$ im Punkte λ so getheilt, dass Quadrat über $\gamma\lambda$ = 3 Quadrat über $\beta\lambda$, so werden wir δ als Aufhängepunkt erhalten. Die Theilung von $\beta\gamma$ geschieht aber auf folgende Weise.

Eine gerade Linie so zu theilen, dass das Quadrat des grössern Theils das Dreifache des Quadrats des kleineren Theils ist. [*Command. VI.*]



Gegeben sei die Gerade $\alpha\delta$. Man theile sie in γ so dass $\alpha\gamma = 3\gamma\delta$. Alsdann beschreibe man über $\alpha\delta$ den Halbkreis $\alpha\beta\delta$, ziehe von γ auf $\alpha\delta$ die Senkrechte $\beta\gamma$ und mache $\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\varepsilon : \delta\varepsilon$, so ist Quadrat über $\alpha\varepsilon$ = 3 Quadrat über $\delta\varepsilon$. Da nämlich $\alpha\gamma : \beta\gamma = \beta\gamma : \gamma\delta$, so ist $\alpha\gamma : \gamma\delta$

= Quadrat über $\alpha\gamma$: Quadrat über $\beta\gamma$,

= Quadrat über $\alpha\varepsilon$: Quadrat über $\delta\varepsilon$,

mithin Quadrat über $\alpha\varepsilon$ = 3 Quadrat über $\delta\varepsilon$.

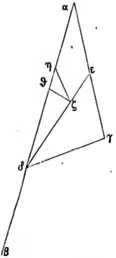
Auf ähnliche Weise wird die Gerade $\alpha\delta$ auch nach einem andern gegebenen quadratischen Verhältniss getheilt, und ebenso jede andere Gerade.

Θέσει ἡ αβ, αγ, καὶ δοθὲν τὸ β, καὶ διήχθω ἡ γδ ἀποτέμνουσα δοθέντα λόγον τὸν τῆς αγ πρὸς βδ· δεῖξαι ὅτι τοῦ αγδ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ πρὸς θέσει. Καὶ τεμνέσθω ἡ αγ δίχα τῷ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε τετμήσθω κατὰ τὸ ζ ὥστε τὴν εζ τρίτον μέρος εἶναι τῆς εδ, τὸ ζ [κέντρον ἔσται τοῦ βάρους τοῦ αγδ τριγώνου, τοῦτο γὰρ ἐδείχθη]. ἤχθω δὴ τῇ αε παράλληλος ἡ ζη, καὶ τῆς αβ τρίτον μέρος ἔστω ἡ αθ· ἔστι δὲ καὶ ἡ αη τρίτον μέρος τῆς αδ, ἐπεὶ καὶ ἡ εζ τῆς εδ· καὶ λοιπὸν οὖν ἡ θη τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς βδ. [καὶ ὁ λόγος τῆς βδ] πρὸς τὴν αγ δοθείς, τῆς δὲ αγ πρὸς τὴν ζη, τριπλάσιον γὰρ αὐτῆς ἐστιν, ὅτι καὶ ἡ μὲν δα τῆς δη ἡμιολία ἐστὶ, τουτέστιν ἡ αε [τῆς ζη ἡμιολία, ἡ δὲ γα τῆς αε] [1]) διπλῆ. λόγος ἄρα καὶ τῆς ηθ πρὸς τὴν ηζ δοθείς, καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ η γωνία, καὶ γὰρ ἡ πρὸς τὸ α, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ηθζ γωνία, καὶ δοθὲν τὸ θ. θέσει ἄρα ἡ θζ εὐθεῖα, καὶ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς τὸ ζ κέντρον.

Ταῦτα μὲν οὖν καὶ τὰ τοιαῦτα θεωρίαν ἔχει· τὰ δὲ καὶ εἰς χρείαν δυνάμενα πεσεῖν μηχανικὴν τοιαῦτα εἴη. Ἐπίπεδον ἐκκλῖναι, ὥστε τὸ κλίμα αὐτοῦ ἐφ' ἓν νεύειν σημεῖον, δοθέντος ἀκλινοῦς ἐπιπέδου, τουτέστι παραλλήλου τῷ ὁρίζοντι, ἐν παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ κλίμα ἔστω ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ. Ἔστι τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον πρότερον ἰσόπλευρον τὸ αβγδ, ἡ δὲ δοθεῖσα, ἐν ᾗ βουλόμεθα ἐκκλῖναι τὸ ἐπίπεδον, ἡ ὑπὸ εζη. ἀπὸ δὲ τῶν α, β, δ σημείων τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν αἱ αθ, βκ, δλ· τὸ δὲ γ σημεῖον ἔστω ὅπου βουλόμεθα τὴν κλίσιν νεύειν. καὶ τῇ μὲν αγ ἐπιζευχθείσῃ ἴση κείσθω ἡ ζη, τῇ δὲ ζη πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ εη. τῇ δὲ ηε ἴση κείσθω ἡ αθ. ἐὰν δὲ νοήσωμεν ἐπεζευγμένην [τὴν θγ], ἔσται ἡ ὑπὸ θγα γωνία τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων. ἤχθω δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν αγ κάθετος ἡ βμ, καὶ τῇ γμ ἴση κείσθω ἡ ζν. τῇ δὲ ζη πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ νξ, τῇ δὲ νξ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν βκ, δλ· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ θλ, θκ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ταῖς αδ, αβ ἐκβληθείσαις

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

Sind die Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ der Lage [*Command. VII.*] nach und der Punkt β gegeben, und zieht man $\gamma\delta$ welche (die Linie $\alpha\beta$) nach dem gegebenen Verhältniss von $\alpha\gamma : \beta\delta$, theilt, so ist zu zeigen, dass der Schwerpunkt des Dreiecks $\alpha\gamma\delta$ auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegt.



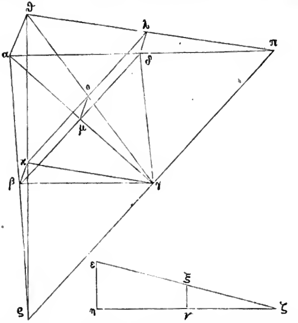
Man halbire $\alpha\gamma$ in ε, ziehe $\delta\varepsilon$ und theile sie in ζ so dass $\varepsilon\zeta = \frac{1}{3}\,\varepsilon\delta$, so wird, wie früher gezeigt ist, ζ der Schwerpunkt des Dreiecks $\alpha\gamma\delta$ sein. Man ziehe nun zu $\alpha\varepsilon$ die Parallele $\zeta\eta$, und es sei $\alpha\vartheta = \frac{1}{3}\,\alpha\beta$; es ist aber $\alpha\eta = \frac{1}{3}\,\alpha\delta$, da $\varepsilon\zeta = \frac{1}{3}\,\varepsilon\delta$, mithin $\vartheta\eta = \frac{1}{3}\,\beta\delta$. Nun ist das Verhältniss $\beta\delta : \alpha\gamma$ gegeben, ebenso $\alpha\gamma : \zeta\eta$, denn $\alpha\gamma = 3\zeta\eta$, weil $\delta\alpha = \frac{3}{2}\,\delta\eta$ d. h. $\alpha\varepsilon = \frac{3}{2}\,\zeta\eta$ und $\gamma\alpha = 2\,\alpha\varepsilon$. Mithin ist auch das Verhältniss $\eta\vartheta : \eta\zeta$ gegeben, so wie der Winkel η, weil $\angle\,\alpha$ gegeben ist, folglich ist auch $\angle\,\eta\vartheta\zeta$ gegeben, daher der Punkt ϑ. Demnach ist die Gerade $\vartheta\zeta$ der Lage nach gegeben, und auf ihr liegt der Schwerpunkt ζ.

Dies und ähnliches betrifft die Theo- [*Command. VIII.*] rie; das Folgende dürfte auch in das Gebiet der praktischen Mechanik fallen. Eine Ebene zu neigen, so dass die Richtung der Neigung derselben durch einen Punkt geht, wenn die gegebene Ebene ohne Neigung d. h. die dem Horizonte parallele Ebene, in einem Parallelogramm und die Neigung in einem gegebenen Winkel besteht.

Es sei zuerst das gegebene Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ ein gleichseitiges, der gegebene Winkel, unter welchem wir die Ebne neigen wollen, sei $\varepsilon\zeta\eta$. Man errichte in den Punkten α, β, δ auf der vorausgesetzten Ebene die Senkrechten $\alpha\vartheta$, $\beta\varkappa$, $\delta\lambda$, und es sei γ der Punkt, nach welchem wir die Neigung richten wollen. Man ziehe $\alpha\gamma$, mache $\zeta\eta = \alpha\gamma$, errichte auf $\zeta\eta$ die Senkrechte $\varepsilon\eta$ und mache $\alpha\vartheta = \eta\varepsilon$. Denken wir uns nun $\vartheta\gamma$ gezogen, so wird $\angle\,\vartheta\gamma\alpha$ der Winkel der Neigung der Ebenen sein. Vom Punkte β ziehe man nun auf $\alpha\gamma$ die Senkrechte $\beta\mu$, mache $\zeta\nu = \gamma\mu$,

κατὰ τὰ π, ρ σημεῖα· ὅτι δὲ συμπίπτουσεν, δῆλον, ἀπ' ἐλαττόνων γάρ εἰσιν δύο ὀρθῶν καὶ αὗται κἀκεῖναι. ἔσται δὴ τὸ θκλ ἐπίπεδον κεκλιμένον πρὸς τὸ αβγδ ἐν τῇ ὑπὸ θγα, τουτέστι τῇ ὑπὸ εζη· ἐὰν γὰρ νοήσωμεν τῇ αθ παράλληλον ἠγμένην τὴν μο καὶ ἐπεζευγμένην οκ, ἔσται ἡ μὲν μο ἴση τῇ νξ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ζνξ τρίγωνον τῷ γμο. ἡ δὲ κο τῇ βμ ἴση καὶ παράλληλος, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ κβμο ὀρθὸν πρὸς ὑποκείμενον. καὶ ἐπεὶ τὰ π, ρ, γ σημεῖα ἐν δυσὶν ἅμα ἐπιπέδοις ἐστὶ τῷ τε ὑποκειμένῳ αβγδ, ἐν ᾧ ἐστι καὶ τὰ π, ρ σημεῖα, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ κθλγ, τὰ π, γ, ρ ἄρα σημεῖα ἐπὶ μιᾶς ἐστιν εὐθείας τῆς πγρ. κοινῆς τομῆς οὔσης τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ κ, ο, λ σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τοῦ κθλγ ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τῶν κο, λο παραλλήλων τῷ αβγδ ἐπιπέδῳ, ὥστε τὴν διὰ τῶν κ, ο, λ εὐθεῖαν παράλληλον εἶναι τῇ πρ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ απ πρὸς πδ οὕτως ἡ θα πρὸς λδ, ὡς δὲ ἡ αρ πρὸς ρβ οὕτως ἡ αθ πρὸς βκ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ δλ τῇ βκ, ἴση ἄρα καὶ ἡ απ τῇ αρ, καὶ γωνία ὑπὸ απρ τῇ ὑπὸ αρπ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ παγ ἴση τῇ ὑπὸ ραγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγπ τῇ ὑπὸ αγρ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν καὶ ἡ πρ εὐθεῖα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αγ. καὶ ἔστιν αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς καὶ τῷ αβγδ ἐπιπέδῳ ἡ μο, καὶ ἡ ογ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ρπ διὰ λῆμμα σφαιρικῶν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγπ, ογπ· τὸ κθλγ ἄρα ἐπίπεδον κέκλιται πρὸς τὸ ἀπὸ αβγδ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ἐζη. ἀλλὰ δὴ ἔστω μείζων ἡ αβ τῆς αδ, τῶν ἄλλων ὑποκειμένων τῶν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ αγπ ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ἡ απ πρὸς πδ οὕτως ἡ αθ πρὸς δλ, ὡς δὲ ἡ αρ πρὸς ρβ οὕτως ἡ αθ πρὸς βκ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ δλ τῇ βκ, καὶ ὡς ἄρα ἡ απ πρὸς πδ οὕτως ἡ αρ πρὸς ρβ. καὶ διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αδ πρὸς δπ οὕτως ἡ αβ πρὸς βρ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αδ πρὸς αβ οὕτως ἡ δπ πρὸς βρ. ἐλάττων δὲ ἡ αδ τῆς αβ, ἐλάττων ἄρα καὶ ἡ δπ τῆς βρ, ὅλη ἄρα ἡ απ ἐλάττων ἐστὶ τῆς αρ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αρπ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ απρ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ απρ τῆς ὑπὸ αρπ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γαπ τῆς ὑπὸ γαρ μείζων, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγπ τοῦ αγπ τριγώνου λοιπῆς τῆς ὑπὸ αγρ τοῦ αγρ τριγώνου ἐλάσσων ἐστίν· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ αγπ γωνία. ἡ κλίσις ἄρα τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων πρὸς τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν

ziehe auf $\zeta\eta$ die Senkrechte $\nu\xi$ und mache $\beta\varkappa = \delta\lambda = \nu\xi$; ferner



ziehe man noch $\vartheta\lambda$, $\vartheta\varkappa$ und verlängere sie bis sie mit den verlängerten $\alpha\delta$, $\alpha\beta$ in den Punkten π, ϱ zusammentreffen, dies findet offenbar statt, da sie Winkel bilden die kleiner als 2 R sind. Nun ist die Ebene $\vartheta\varkappa\lambda$ zu der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ unter dem Winkel $\vartheta\gamma\alpha = \varepsilon\zeta\eta$ geneigt, denn denken wir uns $\mu o \parallel \alpha\vartheta$ gezogen und $o\varkappa$ verbunden, so ist $\mu o = \nu\xi$, weil die Dreiecke $\zeta\nu\xi$, $\gamma\mu o$ gleichwinklig sind; es ist aber $\varkappa o =$ und $\parallel$ $\beta\mu$, mithin steht das Parallelogramm $\varkappa\beta\mu o$ auf der angenommenen Ebene senkrecht. Da nun die Punkte π, ϱ, γ in zwei Ebenen zugleich liegen, nämlich in der angenommenen $\alpha\beta\gamma\delta$, in welcher die Punkte π. ϱ liegen, und in der Ebene $\varkappa\vartheta\lambda\gamma$, so werden die Punkte π. γ, ϱ in einer Geraden $\pi\gamma\varrho$ liegen, die der gemeinsame Durchschnitt der genannten Ebene ist. Aus demselben Grunde liegen auch die Punkte $\varkappa$, o, λ auf dem gemeinsamen Durchschnitt der Ebene $\varkappa\vartheta\lambda\gamma$ und derjenigen, die durch die zu der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ Parallelen $\varkappa o$, λo gelegt ist, so dass die durch die Punkte $\varkappa$, o, λ gehende Gerade der $\pi\varrho$ parallel ist. Da nun

γ, π θεωρεῖται, ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν γπ καθέτου ἀγομένης. ὡς οὖν ἐκκλῖναι δύνατόν ἐστιν ἐπίπεδον, δύνατόν ἐστιν ἄρα καὶ ἐκκεκλιμένου τὴν κλίσίν εἰπεῖν, τουτέστιν ἐν ποίᾳ γωνίᾳ κέκλιται τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ παράλληλον τῷ ὁρίζοντι.

Βάρους δοθέντος ὑπὸ δοθείσης ἀγομένου δυνάμεως ἐν τῷ παρὰ τὴν ὁρίζοντα ἐπιπέδῳ καὶ ἑτέρου ἐπιπέδου κεκλιμένου πρὸς τὸ ὑποκείμενον δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτεθέντος, εὑρεῖν τὴν δύναμιν ὑφ᾽ ὅσης ἀχθήσεται τὸ βάρος τὸ ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔστω τὸ μὲν διὰ τῆς μν εὐθείας ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ διὰ τῆς μκ κεκλίμενον πρὸς αὐτὸ γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ κμν· βάρος δέ τι τὸ α κινείσθω ὑπὸ δυνάμεως τῆς γ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου. καὶ νοείσθω τὸ α ἰσοβαρὴς σφαῖρα ἡ περὶ κέντρον τὸ ε, καὶ κείσθω ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν μ, κ ἐπιπέδου ψαύουσα αὐτοῦ κατὰ τὸ λ σημεῖον, ὡς ἐστι σφαιρικῶν $\overline{\beta}$ θεωρήματι. ἡ ἄρα ἡ ελ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦτο γὰρ δέδεικται θεωρήματι $\bar{\delta}$ σφαιρικῶν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν κμ κά-

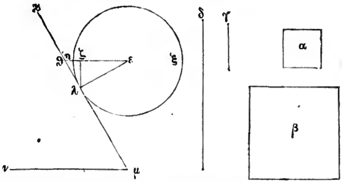
$$\alpha\pi : \pi\delta = \vartheta\alpha : \lambda\delta$$
und $\alpha\varrho : \varrho\beta = \alpha\vartheta : \beta\varkappa$
und $\delta\lambda = \beta\varkappa$,
so ist auch $\alpha\pi = \alpha\varrho$
und $\angle\, \alpha\pi\varrho = \angle\, \alpha\varrho\pi$;
es ist aber auch $\angle\, \pi\alpha\gamma = \angle\, \varrho\alpha\gamma$
folglich $\angle\, \alpha\gamma\pi = \angle\, \alpha\gamma\varrho$,

mithin ein jeder derselben = R, und es wird die Linie $\pi\varrho$ von $\alpha\gamma$ halbirt und die letztere steht auf ihr senkrecht. Es ist aber auch μo auf $\alpha\gamma$ und auf der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ senkrecht, daher steht auch nach einem Lemma der Sphärik $o\gamma$ auf $\varrho\pi$ senkrecht; folglich ist ein jeder der Winkel $\alpha\gamma\pi$, $o\gamma\pi$ = R. Demnach ist die Ebene $\varkappa\vartheta\lambda\gamma$ zu der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ unter dem gegebenen Winkel $\varepsilon\zeta\eta$ geneigt. — Es sei nun, unter der Bedingung dass alles andere unverändert bleibt, $\alpha\beta > \alpha\delta$, so soll der Winkel $\alpha\gamma\pi <$ R sein. Da nämlich $\alpha\pi : \alpha\delta = \alpha\vartheta : \delta\lambda$, und $\alpha\varrho : \varrho\beta = \alpha\vartheta : \beta\varkappa$ und $\delta\lambda = \beta\varkappa$, so ist auch $\alpha\pi : \pi\delta = \alpha\varrho : \varrho\beta$, mithin $\alpha\delta : \pi\delta = \alpha\beta : \varrho\beta$ oder $\alpha\delta : \alpha\beta = \pi\delta : \varrho\beta$. Aber $\alpha\delta < \alpha\beta$, folglich auch $\pi\delta < \varrho\beta$, und $\alpha\pi < \alpha\varrho$, daher $\angle\, \alpha\varrho\pi < \angle\, \alpha\pi\varrho$ oder $\angle\, \alpha\pi\varrho > \angle\, \alpha\varrho\pi$. Es ist aber auch $\angle\, \gamma\alpha\pi > \angle\, \gamma\alpha\varrho$, mithin $\angle\, \alpha\gamma\pi > \angle\, \alpha\gamma\varrho$, demnach $\angle\, \alpha\gamma\pi <$ R. Demnach wird die Neigung der genannten Ebenen nach einem Punkt zwischen γ, π untersucht, wenn man von dem Punkt α auf $\gamma\pi$ eine Senkrechte fällt. Wie es nun möglich ist eine Ebene zu neigen, so ist es auch möglich die Neigung einer geneigten Ebene zu finden, d. h. unter welchem Winkel die Ebene zu der zum Horizont parallelen Ebene geneigt ist.

Wenn eine gegebene Last von einer [*Command. IX.*] gegebenen Kraft auf einer zum Horizont parallelen Ebene bewegt wird und eine andere Ebene unter einem gegebenen Winkel gegen die erstere geneigt ist, die Kraft zu finden, durch welche die Last auf der geneigten Ebene bewegt wird. Die erstere Ebene gehe durch die Gerade $\mu\nu$, die unter dem gegebenen Winkel $\varkappa\mu\nu$ gegen dieselbe geneigte Ebene durch die Gerade $\mu\varkappa$; irgend eine Last α werde von der Kraft γ auf der ersteren Ebene bewegt. Man denke sich die Last α als eine gleich schwere Kugel mit dem Mittelpunkt ε auf der Ebene $\mu\varkappa$ liegend und sie im Punkte λ berührend, nach dem zweiten Theorem der Sphärik. Demnach steht $\varepsilon\lambda$ auf der Ebene senkrecht, wie es im vierten Theorem der Sphärik bewiesen ist, daher ist auch $\varepsilon\lambda$ auf der Linie $\varkappa\mu$ senkrecht. Man erweitere

θετός ἐστιν ἡ ελ. ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν κμ, ελ ἐπίπεδον καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ληξ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ε κέντρου τῇ μν παράλληλος ἡ εθ, καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ λ ἡ λζ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ εθλ γωνία, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ κμν δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ελζ, ἴση οὖσα τῇ ὑπὸ εθλ, ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ εθλ τῷ ελζ τριγώνῳ, δοθὲν ἄρα τὸ ελζ τρίγωνον τῷ εἴδει. λόγος ἄρα τῆς ελ, τουτέστι τῆς εη, πρὸς εζ δοθείς, καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ηζ πρὸς εζ λόγος ἐστὶ δοθείς. πεποιήσθω οὖν ἡ ηζ πρὸς ζε οὕτω τὸ μὲν α βάρος πρὸς τὸ β, ἡ δὲ γ δύναμις πρὸς τὴν δ· καὶ ἔστι τοῦ α δύναμις ἡ γ, καὶ τοῦ β ἄρα δύναμις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται ἡ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ηζ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζε οὕτω τὸ α βάρος πρὸς τὸ β. ἂν τεθῇ τὰ α, β βάρη περὶ κέντρα βάρη τὰ ε, η, ἰσοῤῥοπήσει ἀρτώμενα ἀπὸ τοῦ ζ σημείου ἢ ἐπὶ ὑποθέματος κείμενα τοῦ λζ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ὁρίζοντα. κεῖται δὲ τὸ α βάρος περὶ κέντρον τὸ ε, ἀντ' αὐτοῦ γὰρ ἡ σφαῖρα. τεθὲν ἄρα τὸ β βάρος περὶ κέντρον τὸ η ἰσοῤῥοπήσει τῇ σφαίρᾳ, ὥστε μὴ καταφέρεσθαι τὴν σφαῖραν διὰ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλ' ἐφεστάναι ἀῤῥεπῆ, ὡς εἰ καὶ ὑπὸ τοῦ ὑποκειμένου ἑστῶσα ἐτύγχανεν. ἐκινεῖτο δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῆς γ δυνάμεως, κινηθήσεται ἄρα ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς συναμφοτέρου τῆς τε γ δυνάμεως καὶ τῆς τοῦ β βάρους, τουτέστι τῆς δ δυνάμεως· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ δ δύναμις. ἡ μὲν οὖν γεωμετρικὴ τοῦ τε προβλήματος ἀνάλυσις ὑποδέδεικται· ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ παραδείγματος ποιησώμεθα τήν τε κατασκευὴν καὶ τὴν ἀπόδειξιν, ἔστω τὸ μὲν α βάρος ταλάντων εἰ τύχοι σ ἀγόμενον ἐν τῷ παραλλήλῳ ὁρίζοντι ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῆς γ κινούσης δυνάμεως, τουτέστι οἱ κινοῦντες ἔστωσαν ἄνδρες μ, ἡ δὲ ὑπὸ κμν γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ εθλ, δεμοίρου ὀρθῆς, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζλθ τρίτον ὀρθῆς, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ελθ. διμοίρου ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ελζ. οἵων ἄρα αἱ δ ὀρθαὶ τξ, τούτων λκ ἡ ὑπὸ ελζ, οἵων δέ αἱ β ὀρθαὶ τξ, τούτων ρκ. καὶ τοῦ περιγραφομένου ἄρα περὶ τὸ εζλ τρίγωνον ὀρθογώνιον κύκλου, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς εζ τοιούτων ἔσται ρδ οἵων ὁ κύκλος τξ, αὐτὴ δὲ ἡ εζ τοιούτων ρκ ἔγγιστα οἵων ελ τοῦ κύκλου διάμετρος ρκ, ταῦτα γὰρ δῆλα ἐκ τοῦ κανόνος τῶν ἐγκυκλίων εὐθειῶν τῶν κατὰ Πτολεμαῖον, ὄντος κειμένου δ' ἐν τῷ α τῶν μαθηματικῶν. λόγος ἄρα τῆς ελ, τουτέστι τῆς εη, πρὸς εζ, ὃν ρκ πρὸς ρδ,

die durch $\varkappa\mu$, $\varepsilon\lambda$ gelegte Ebene, welche die Kugel in dem Kreise



$\lambda\nu\xi$ schneidet, und ziehe durch den Mittelpunkt ε zu $\mu\nu$ die Parallele $\varepsilon\vartheta$, und fälle auf sie von λ die Senkrechte $\lambda\zeta$. Da nun der Winkel $\varepsilon\vartheta\lambda$ gegeben, denn er ist dem gegebenen spitzen Winkel $\varkappa\mu\nu$ gleich, so ist auch Winkel $\varepsilon\lambda\zeta$ gegeben, da er dem Winkel $\varepsilon\vartheta\lambda$ gleich ist, indem die Dreiecke $\varepsilon\vartheta\lambda$, $\varepsilon\lambda\zeta$ gleichwinklig sind; mithin ist $\triangle\ \varepsilon\lambda\zeta$ der Form nach gegeben, folglich ist das Verhältniss $\varepsilon\lambda$ d. h. $\varepsilon\eta : \varepsilon\zeta$ gegeben, mithin ist auch das Verhältniss $\eta\zeta : \varepsilon\zeta$ gegeben. Man mache nun $\eta\zeta : \zeta\varepsilon =$ Last α : Last β = Kraft γ : Kraft δ; es ist aber die zur Last α gehörige Kraft γ, mithin wird die zur Last β gehörige Kraft für dieselbe Ebene δ sein. Weil aber $\eta\zeta : \zeta\varepsilon =$ Last α : Last β, so werden, falls man die Lasten α, β um die schweren Mittelpunkte ε, η annimmt, diese im Punkt ζ aufgehangen, der die auf dem Horizonte Senkrechte $\lambda\zeta$ zur Stütze hat, im Gleichgewicht sein. Es ist aber die Last α um den Mittelpunkt ε, denn an ihre Stelle ist die Kugel getreten, mithin wird die um den Mittelpunkt η angenommene Last β mit der Kugel in Gleichgewicht sein, so dass die Kugel auf der geneigten Ebene nicht herabrollt, sondern ruhig liegen bleibt, als ob sie auf der horizontalen Ebene stände. Sie wurde nun auf der horizontalen Ebene von der Kraft γ bewegt, sie wird also auf der geneigten Ebene von beiden zusammen, nämlich von der Kraft γ und von der Last β d. h. von der Kraft δ bewegt werden; die Kraft δ ist aber gegeben. Dies ist die geometrische Analysis des Problems; wir wollen nun auch an einem Beispiel die Construction und den Beweis zeigen. Es sei die Last

καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ζη πρὸς ζε λόγος ὅν ι̅ς̅ πρὸς ρ̅δ̅. τοῦτο μὲν ὁ αὐτός ἐστι ὁ τοῦ α βάρους πρὸς τὸ β, καὶ τῆς γ δυνάμεως πρὸς τὴν δ, καὶ ἔστι τὸ μὲν α βάρος ταλάντων α, ἡ δὲ κινοῦσα δύναμις ἀνδρῶν μ̅· ἔσται ἄρα καὶ τὸ μὲν β βάρος ταλάντων ,α̅τ̅, ἡ δὲ δ δύναμις ἀνθρώπων σ̅ξ̅, ὡς γὰρ ι̅ς̅ πρὸς ἑκατὸν τέσσαρα οὕτως σ̅ πρὸς ,ατ καὶ μ̅ πρὸς σ̅ξ̅. τοῦ ἄρα πρώτου βάρους ταλάντων σ̅ κινουμένου ἐν παραλλήλῳ τῷ ὁρίζοντι ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῶν μ̅ ἀνδρῶν, τὸ αὐτὸ βάρος κινηθήσεται ὑπὸ συναμφοτέρων τῶν προειρημένων ἀνθρώπων, τουτέστιν ὑπὸ τῶν ὅλων, ἐν ἐπιπέδῳ κεκλιμένῳ πρὸς τὸν ὁρίζοντα, τὴν ὑπὸ κμν γωνίαν διμοίρου ὀρθῆς ὑποκειμένην.

Τῆς αὐτῆς δέ ἐστι θεωρίας, τὸ δοθὲν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει κινῆσαι· τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδους μὲν[1]*) εὕρημα λέγεται μηχανικόν, ἐφ' ᾧ*[2]*) λέγεται εἰρηκέναι· δός μοί φησι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν. Ἥρων δὲ ὁ Ἀλεξανδρεὺς πάνυ σαφῶς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ ἐξέθετο ἐν τῷ καλουμένῳ βαρουλκῷ, λῆμμα λαβὼν ὅπερ ἐν τοῖς μηχανικοῖς ἀπέδειξεν· ἔνθα καὶ περὶ τῶν πέντε δυνάμεων διαλαμβάνει, τουτέστι τοῦ τε σφηνὸς καὶ μοχλοῦ καὶ κοχλίου καὶ πολυσπάστου καὶ ἄξονος ἐν τῷ περιτροχίῳ, δι' ὧν*[3]*) τὸ δοθὲν τῇ δυνάμει κινεῖται καθ' ἑκάστην δύναμιν. ἐν δὲ τῷ βαρουλκῷ διὰ τυμπάνων ὀδοντωτῶν παραθέσεως ἐκίνει τὸ*[4]*) δοθὲν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει, τῆς διαμέτρου τυμπάνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἄξονος, λόγον ἐχούσης ὅν ε̅ πρὸς ἕνα, τοῦ κινουμένου*

---

1) Die Hdsch. hat *μ̅*.

2) Die Hdsch. hat *ἐφ' ὧν*.

3) Die Hdsch hat *περὶ τροχιωδιῶν*

4) Die Hdsch. hat *ἐκινεῖτο*.

z. B. 200 Talente schwer und sie werde auf der zum Horizont parallelen Ebene von der bewegenden Kraft γ gezogen, d. h. 40 Männer vermögen sie zu bewegen; der Winkl $\varkappa\mu\nu = \angle\ \varepsilon\delta\lambda = \frac{2}{3}$ R, mithin $\angle\ \zeta\lambda\vartheta = \frac{1}{3}$ R; es ist aber $\varepsilon\lambda\vartheta =$ R, folglich auch $\angle\ \varepsilon\lambda\zeta = \frac{2}{3}$ R. Von den 360 Theilen, die aul 4 R kommen, enthält demnacb der Winkel $\varepsilon\lambda\zeta$ 60; von den 360 Theilen aber, die auf 2 R kommen, enthält er 120. Beschreibt man nun um das rechtwinklige Dreieck $\varepsilon\zeta\lambda$ einen Kreis, so werden von den 360 Theilen die auf den ganzen Kreis kommen, 120 aul den Bogen über $\varepsilon\zeta$ lallen; die Linie $\varepsilon\zeta$ selbst wird sehr nahe 104 von den Theilen enthalten, wovon 120 auf den Durchmesser $\varepsilon\lambda$ des Kreises gehen, wie dies aus Ptolomäus' Kanon der Sehnen in dem ersten Buche der mathematischen Schriften erhellt. Demnach ist $\varepsilon\lambda$ d. h. $\varepsilon\eta : \varepsilon\zeta = 120 : 104$, mithin $\zeta\eta : \varepsilon\zeta = 16 : 104$. Dies ist aber dasselbe Verhältniss, in welchem die Last α zur Last β und die Kraft γ zur Kraft δ steht; nun ist die Last α 200 Talente schwer und die bewegende Kralt sind 40 Männer, mithin wird die Last β 1300 Talente schwer sein und die Kraft δ = 260 Männern, denn es ist $16 : 104 = 200 : 1300 = 40 : 260$. Wird also die Last von 200 Talenten auf der horizontalen Ebene von 40 Männern bewegt, so wird dieselbe Last von allen Männern zusammen auf der gegen den Horizont unter dem Winkel $\varkappa\mu\nu = \frac{2}{3}$ R geneigten Ebene bewegt werden.

Durch dieselbe Betrachtung lässt sich [*Command. X.*] die Aufgabe lösen: eine gegebene Last durcb eine gegebene Kralt zu bewegen. Es ist dies die Erfindung Archimed's in der Mechanik, wobei er gesagt haben soll: Gieb mir einen Standpunkt und icb bewege die Erde. Hero von Alexandrien hat die Construktion davon in dem sogenannten Barulkon sehr deutlich auseinander gesetzt mit Hülfe eines Lehrsatzes, den er in der Mechanik bewiesen; daselbst bandelt er auch über die fünf Kraftmaschinen, über den Keil, Hebel, über die Schraube, über den Flaschenzug, über die Welle mit dem Rade, durch welche die gegebene Last durch die gegebene Kralt mit Hülfe einer jeden Kraltmaschine bewegt wird. In dem Barulkon bewegte er die gegebene Last durch die gegebene Kraft mittelst gezahnter Scheiben unter der Annahme dass der

βάρους ταλάντων [χιλίων, τῆς δὲ κινούσης δυνάμεως ὑποκειμένης][1]) ταλάντων ε· ἔστω δὴ ἡμᾶς ἐπὶ διπλασίου λόγου τὸ αὐτὸ δεικνύναι, καὶ ταλάντων ρξ ὄντος τοῦ κινουμένου βάρους ἀντὶ χιλίων, καὶ τῆς κινούσης αὐτὸ δυνάμεως ὑποκειμένης ταλάντων δ ἀντὶ ε, τουτέστι ὁ κινῶν ἄνθρωπος δυνάσθω καθ' αὑτὸν ἄνευ μηχανῆς ἕλκειν τάλαντα δ. καὶ ἔστω τὸ εἰρημένον ὑπ' αὐτοῦ γλωσσόκομον τὸ αβγδ καὶ ἐν αὐτῷ εἰς τοὺς μακροὺς καὶ παραλλήλους τοίχους ἔστω ἄξων αὐτοῖς εὐλύτως στρεφόμενος ὁ εζ. τούτῳ[2]) δὲ συμφυὲς ἔστω τύμπανον ὠδοντωμένον ἀκτῖσιν ὀδοντωτοῖς τὸ ηθ ἔχον τὴν διάμετρον διπλασίαν τῆς διαμέτρου τῆς εζ διαγωνίου τοῦ ἄξονος τοῦ κατὰ κρόταφον. γίνεται γὰρ τετράγωνος μὲν περὶ μέσον ἐπὶ τοσοῦτον μῆκος, ὅσον ἐστὶ τὸ πάχος τοῦ τυμπάνου εἰς ὃ ἐναρμόζεται ἀσφαλῶς. στρογγύλος δέ πως ἢ λελωβημένος ἐκ τῶν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τυμπάνου μερῶν. ἐὰν ἄρα τὰ ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ἑλκομένου δεδεμένα σχοινία, καλούμενα δὲ ὅπλα, διά τινος ὀπῆς, μᾶλλον δὲ ἀνατομῆς πλατείας οὔσης ἐν τῷ αβ τοίχῳ ἐπειληθῇ περὶ τὸν εζ ἄξονα ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ηθ τυμπάνου καὶ στραφῇ τὸ ηθ τύμπανον, καὶ τὸ ἐπιστρέψει καὶ τὸν συμφυῆ ἄξονα κινούμενον περὶ τὰ ἄκρα ἐν δακτύλοις χαλκοῖς καὶ πυξίσιν ὁμοίως χαλκαῖς κινουμένοις, κειμέναις δ' ἐν τοῖς εἰρημένοις αβ, γδ τείχοις· ἐπειλούμενα δὲ τὰ ἐκ τοῦ βάρους ὁ καλεῖται φορτίον ὅπλα κινήσει τὸ βάρος. ἵνα δὲ κινηθῇ τὸ ηθ τύμπανον. δεήσει δύναμιν παρασχεῖν ταλάντων πλεῖον π[3]) διὰ τὸ τὴν διάμετρον τοῦ τυμπάνου τῆς διαμέτρου τοῦ ἄξονος εἶναι διπλασίαν· τοῦτο γὰρ πρόβλημά ἐστιν ὑπὸ Ἥρωνος δεικνύμενον ἐν τοῖς μηχανικοῖς, καὶ ἄλλα πλεῖστα προβλήματα τῶν χρησιμωτάτων καὶ βιωφελῶν γέγραπται. ἐπεὶ οὖν οὐκ ἔχομεν τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ταλάντων π, ἀλλὰ ταλάντων δ, γεγονέτω ἕτερος ἄξων παρακείμενος παράλληλος τῇ εζ ὁ κλ, ἔχων συμφυὲς τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ μν, ὥστε τοὺς ὀδόντας αὐτοῦ ἐναρμόζειν τοῖς ὀδοῦσι τοῦ ηθ τυμπάνου. τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ᾖ ὡς ἡ διάμετρος τοῦ τυμπάνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ μν οὕτω τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ ηθ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ μν. πῶς

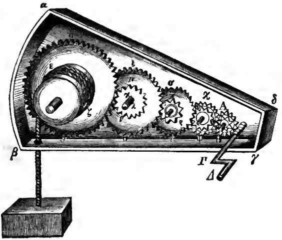
---

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

[2]) Die Hdsch. haben τοῦτο.

[3]) Hdsch. hat πλεῖον ῆ.

Durchmesser der Scheibe zum Durchmesser der Axe in dem Verhältniss von 5 : 1 steht, die bewegte Last 1000 Talente schwer und die bewegende Kraft gleich 5 Talenten ist. Es sei uns gestattet, eben dasselbe in dem Verhältniss von 2 : 1 zu zeigen, dass ferner die bewegte Last 160 Talente schwer anstatt 1000, und die bewegende Kraft = 4 Talenten anstatt 5 angenommen wird, d. h. dass der Mensch ohne Maschine 4 Talente ziehen könne.



Es sei $\alpha\beta\gamma\delta$ eine Vorrichtung die er Futteral nennt, und in derselben sei an den langen parallelen Wänden eine sich leicht drehende Welle $\varepsilon\zeta$; mit dieser sei fest verbunden die Scheibe $\eta\vartheta$, die mit Zähnen Strahlen gleich versehen und deren Durchmesser das Doppelte des Durchmessers der Welle $\varepsilon\zeta$ am Ende derselben genommen gleich ist, die Welle wird nämlich viereckig gegen die Mitte hin auf eine solche Länge, als die Dicke der Scheibe ist, in welche sie fest eingefügt ist; sie ist aber so ziemlich rund oder verjüngt auf beiden Seiten der Scheibe. Wenn nun die an der zu hebenden Last befestigten Taue, welche ὅπλα (Waffen) genannt werden, durch eine Oeffnung oder vielmehr durch einen breiten

δὲ τοῦτο γίνεται, διὰ τῶν ἑξῆς δῆλον ἔσται. δοθὲν μὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μν τύμπανον· τῷ αὐτῷ ἄξονι τῷ κλ συμφυὲς ἔστω τύμπανον τὸ ξο, ἔχον τὴν διάμετρον διπλασίαν τῆς τοῦ μν τυμπάνου διαμέτρου. διὰ δὴ τοῦτο δεήσει τὸν βουλόμενον κινεῖν διὰ τοῦ ξο τυμπάνου τὸ βάρος ἔχειν δύναμιν ταλάντων μ̅, ἐπειδήπερ τὰ π̅ τάλαντα διπλάσιά ἐστι τῶν μ̅ ταλάντων. πάλιν δὲ παρακείσθω τῷ ξο τυμπάνῳ ὀδοντωθέντι ἕτερον τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ πρ συμφυὲς [ἑτέρῳ ἄξονι καὶ τῷ αὐτῷ ἄξονι συμφυὲς ἔστω ἕτερον τύμπανον] στ, ἔχον μὲν ὁμοίως διπλασίαν τὴν διάμετρον τῆς τοῦ πρ τυμπάνου διάμετρον, τοὺς δὲ ὀδόντας μὴ συμπλεκομένους τοῖς ὀδοῦσι τοῦ μν τυμπάνου. ἡ ἄρα διὰ τοῦ στ τυμπάνου κινοῦσα τὸ βάρος δύναμις ἕξει βάρος ταλάντων κ̅· ἦν δὲ ἡ δοθεῖσα δύναμις ταλάντων τεσσάρων. δεήσει οὖν πάλιν ἕτερον μὲν τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ υφ παρακεῖσθαι τῷ στ ὀδοντωθέντι, τῷ δὲ ἄξονι τοῦ υφ τυμπάνου συμφυὲς γενέσθαι τὸ χψ ὠδοντωμένον, οὗ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ υφ τυμπάνου διάμετρον λόγον ἐχέτω ὃν τὰ β̅ πρὸς α̅· ἡ ἄρα κινοῦσα τὸ βάρος δύναμις διὰ τοῦ χψ τυμπάνου ἔσται ταλάτων ι̅. πάλιν δὴ παρακείσθω μὲν τῷ χψ τυμπάνῳ ἕτερον τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ ϟπ, τῷ δὲ ἄξονι αὐτοῦ τύμπανον ἔστω συμφυὲς *AB* [1]) ὠδοντωμένον ὀδοῦσι λοξοῖς, οὗ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ϟπ διάμετρον λόγον ἐχέτω ὃν ἔχει τὰ ι̅ τάλαντα πρὸς τὰ τῆς δοθείσης δυνάμεως τάλαντα δ̅. καὶ τούτων κατασκευασθέντων, ἐὰν ἐπινοήσωμεν τὸ αβγδ γνωσσόκομον μετέωρον κείμενον ἀμεταστάτως, καὶ ἐκ μὲν τοῦ εζ ἄξονος βάρος ἐξάψωμεν, ἐκ δὲ τοῦ *AB* τυμπάνου τὴν ἕλκουσαν δύναμιν τὰ δ̅ τάλαντα, οὐδ' ὁπότερος αὕτως [2]) κατενεχθήσεται, εὐλύτως στρεφομένων τῶν ἀξόνων καὶ τῆς τῶν τυμπάνων παραθέσεως ἀκριβῶς ἁρμοζούσης, ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ ζυγοῦ τινος ἰσοῤῥοπήσει ἡ δύναμις τῶν δ̅ ταλάντων. ἐὰν ἄρα ἑνὶ αὐτῶν προσθῶμεν ὀλίγον τι βάρος, καταῤῥέψει καὶ ἐνεχθήσεται ἐφ' ὁπότερον μέρος ἡ πρόσθεσις γεγένηται· εἰ γὰρ λόγου χάριν τῇ τῶν δ̅ ταλάντων δυνάμει μνααῖον προστεθῇ βάρος, κατακρατῆσαν ἐπισπάσεται τὸ βάρος τῶν ρ̅ξ̅ ταλάντων. ἀντὶ δὲ τῆς προσθέσεως παρακείσθω

---

[1]) In der Hdsch. findet sich hier die Bezeichnung: $\overset{\alpha}{M}\ \overset{\beta}{M}$. Ich habe dafür einfacher grosse Buchstaben gewählt.

[2]) So die Hdsch. vielleicht ist zu lesen οὐδοπότερον αὐτῶν.

Einschnitt in der Wand αβ um die Welle εζ auf jeder Seite der Scheibe ηϑ gewickelt und die Scheibe gedreht wird, so wird diese auch die damit fest verbundene Welle drehen, die an ihren Enden in ehernen Zapfen sich bewegt, die gleichfalls in ehernen in den Wänden αβ, γδ liegenden Zapfenlagern laufen, und die von der Last, die φορτίον genannt wird, ausgehenden Taue werden die Last in Bewegung setzen. Aber um die Scheibe ηϑ zu bewegen, wird eine Kraft von mehr als 80 Talenten nöthig sein, weil der Durchmesser der Scheibe das Doppelte des Durchmessers der Welle ist; dies Problem ist von Hero in seiner Mechanik gelöst, worin auch viele andere sehr nützliche und für das Leben höchst werthvolle Aufgaben beschrieben sind. Da uns nun nicht die Kraft von 80 Talenten gegeben ist, sondern nur von 4 Talenten, so füge man eine andere der εζ parallel liegende Welle κλ hinzu, die mit der gezahnten Scheibe μν fest verbunden ist, so dass die Zähne derselben in die Zähne der Scheibe ηϑ passen. Dies ist der Fall, wenn der Durchmesser der Scheibe zu dem Durchmesser der Scheibe μν sich verhält wie die Anzahl der Zähne von ηϑ zur Anzahl der Zähne von μν. Auf welche Weise dies stattfindet, wird im Folgenden klar werden. Es ist demnach auch die Scheibe μν gegeben. Mit derselben Welle κλ ist die Scheibe ξο fest verbunden, deren Durchmesser das Doppelte des Durchmessers von μν ist. Deshalb wird derjenige, der durch die Scheibe ξο die Last bewegen will, eine Kraft von 40 Talenten nöthig haben, da 80 Talente das Doppelte von 40 Talenten sind. Wiederum sei aber neben der gezahnten Scheibe ξο eine andere gezahnte Scheibe πρ mit einer andern Welle fest verbunden und an derselben Welle eine andere Scheibe στ, deren Durchmesser gleichfalls das Doppelte des Durchmessers der Scheibe πρ ist und deren Zähne mit den Zähnen der Scheibe μν nicht in Berührung kommen. Mithin wird die Kraft, die mittelst der Scheibe στ die Last bewegt, einer Last von 20 Talenten gleich sein. Nun war aber die gegebene Kraft nur von 4 Talenten; es ist also nöthig der gezahnten Scheibe στ wiederum eine gezahnte Scheibe υφ hinzuzufügen und mit der Welle von der Scheibe υφ die gezahnte Scheibe χψ fest zu verbinden, deren Durchmesser zum Durchmesser der Scheibe υφ sich wie 2:1 verhält; demnach wird die Kraft, welche die Last durch die Scheibe χψ bewegt, von 10 Talenten sein. Ferner füge man der Scheibe χψ eine andere gezahnte Scheibe 'ιπ hinzu, mit der Welle der-

κοχλίας τῷ ΑΒ τυμπάνῳ ὁ ωΓ ἔχων τὴν ἕλικα ἁρμόζουσαν τοῖς λοξοῖς ὀδοῦσι τοῦ τυμπάνου τοῦ ΑΒ, τοῦτο δὲ ὡς δεῖ ποιεῖν, ἐν τοῖς αὐτοῖς μηχανικοῖς Ἥρωνος γέγραπται, καὶ ἡμεῖς δὲ τοῦτο σαφέστερον ἑξῆς γράψομεν. στρεφέσθω δὲ ὁ κοχλίας εὐλύτως περὶ τόρμους ἐνόντας ἐν τρήμασι στρογγύλοις ὧν ὁ ἕτερος ὑπερεχέτω εἰς τὸ ἐκτὸς μέρος τοῦ γλωσσοκόμου κατὰ τὸν γδ τοῖχον, καὶ ὑπεροχὴ τετραγωνισθεῖσα λαβέτω χειρολάβην ΓΔ, δι' ἧς ἐπιλαβόμενοι καὶ ἐπιστρέφοντες τὸν κοχλίαν ἐπιστέψομεν καὶ τὸ ΑΒ τύμπανον, ὥστε καὶ τὸ ⊢π συμφυὲς αὐτῷ. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ παρακείμενον αὐτῷ τὸ χψ στραφήσεται καὶ τὸ συμφυὲς αὐτῷ τοῦ υφ, καὶ τὸ παρακείμενον αὐτῷ τὸ στ καὶ τὸ τούτῳ συμφυὲς τὸ πρ, καὶ τὸ τούτῳ παρακείμενον τὸ [ξο καὶ τὸ τούτῳ συμφυὲς τὸ μν, καὶ τὸ τούτῳ παρακείμενον τὸ] ηθ, ὥστε καὶ ὁ τούτῳ συμφυὴς ἄξων ὁ εζ περὶ ὃν ἐπειλοῦντες ἐκ τοῦ φορτίου ὅπλα κινήσομεν τὸ βάρος. ὅτι [1]) γὰρ κινήσεται, δῆλον ἐκ τοῦ προστεθεῖσθαι ἑτέραν δύναμιν τὴν τῆς χειρολαβῆς, ἥτις περιγράφει κύκλον τῆς τοῦ κοχλίου περιμέτρου μείζονα, ἀπεδείχθη γὰρ ἐν τῷ περὶ ζυγῶν Ἀρχιμήδους καὶ τοῖς Φίλωνος καὶ Ἥρωνος μηχανικοῖς, ὅτι οἱ μείζονες κύκλοι κατακρατοῦσιν τῶν ἐλασσόνων κύκλων, ὅταν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἡ κύλισις [2]) αὐτῶν γίνηται.

---

[1]) So emendirt *Commandin*; die Hdsch. hat *τί*.

[2]) Die Hdsch. hat *κύκλισις*.

eine gezahnte Scheibe *AB* mit schiefen Zähnen fest verbunden, deren Durchmesser zum Durchmesser von ϟπ im Verhältniss von 10 Talenten zu den 4 Talenten der gegebenen Kraft steht. Nachdem dies vorgerichtet, denken wir uns das Futteral *αβγδ* in der Höhe fest aufgestellt, an der Welle *εζ* die Last befestigt und an der Scheibe *AB* die ziehende Kraft von 4 Talenten, so wird nach keiner Seite ein Herabsinken stattfinden, wenn nur die Welle sich mit Leichtigkeit drehen und die neben einander gestellten Scheiben vollkommen in einander greifen, vielmehr wird wie an einer Wage die Kraft von 4 Talenten (den 160 Talenten) das Gleichgewicht halten. Wenn wir mithin einem derselben eine kleine Last hinzufügen, so wird ein Herabsinken vor sich gehen nach der Seite hin, wo die Last hinzugefügt wurde; fügen wir z. B. der Kraft von 4 Talenten die Last von einer Mine hinzu, so wird sie das Uebergewicht erhalten und die Last von 160 Talenten anziehen. Anstatt etwas an Gewicht hinzuzulegen, sei eine Schraube *ωΓ* der Scheibe *AB* angefügt, die einen in die schiefen Zähne der Scheibe *AB* passenden Schraubengang hat; wie dies ausgeführt werden muss, wird ebenfalls in der Mechanik Hero's beschrieben und auch wir werden es in der Folge deutlich darthun. Es drehe sich also die Schraube mit Leichtigkeit um abgerundete Stellen in runden Löchern, von denen die eine über die äussere Wand des Futterals hervorragen mag, und dieser hervorragende Theil, der viereckig ist, sei mit einer Handhabe *ΓΔ* versehen, durch die wir die Schraube anlassen und drehen und auch die Scheibe *AB* drehen werden, daher auch die mit ihr fest verbundene ϟπ; durch diese wird auch die daran stossende *χψ* und die mit dieser fest verbundene *υφ* gedreht, ferner die an diese anstossende *στ* und die mit ihr fest verbundene *πϱ*, und ebenso die an diese stossende *ξο* und die mit ihr fest verbundene *μν*, und endlich die neben dieser liegende *ηϑ*, daher auch die mit dieser letztern fest verbundene Welle *εζ*, um welche wir die von der Last ausgehenden Taue gewunden haben und wodurch wir die Last bewegen werden. Dass eine Bewegung derselben erfolgen wird, ergiebt sich daraus dass eine andere Kraft an der Handhabe hinzugesetzt ist, die einen grössern Kreis als der Umfang der Schraube ist beschreibt; es ist nämlich in der Schrift Archimed's über die Wage und in der Mechanik Philo's und Hero's gezeigt, dass grössere Kreise über kleinere Kreise das Uebergewicht erhalten, wenn die Drehung um denselben Mittelpunkt geschieht.

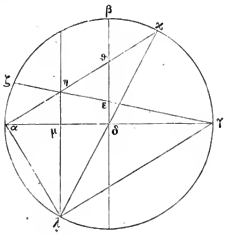
Τὰ μὲν οὖν μάλιστα συνέχοντα τὴν μηχανικὴν θεωρίαν ταῦτ᾽ ἂν εἴη. τῆς δὲ ὀργανικῆς πολλὰ μὲν εἴδη καὶ μέρη· τὰ μὲν γὰρ ὑπὸ τῆς μηχανικῆς καὶ γνωμονικ καὶ τῆς περὶ ὑδρείων πραγματείας λόγῳ θεωρούμενα δι᾽ αὐτῶν τῶν ὀργάνων ὑπὸ ταύτης κατασκευαζομένων[1] *δείκνυται, πολλὰ δὲ καὶ χωρὶς τῶν μηχανικῶν ἔξωθεν ὑπ᾽ αὐτῆς ἐπιτελεῖται, καί τινα ταῖς γεωμετρικαῖς ἐφόδοις δυσχείριστα μεταλαβοῦσα τοῖς ὀργάνοις εἰς ῥᾳδιεστέραν ἤγαγε κατασκευήν. αὐτίκα γοῦν τὸ καλούμενον Δηλιακὸν πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον, οὐχ οἷόν τε ἦν κατασκευάσαι τῷ γεωμετρικῷ λόγῳ κατακολουθοῦντας, ἐπεὶ μηδὲ τὰς τοῦ κώνου τομὰς ῥᾴδιον ἐν ἐπιπέδῳ γραφεῖν ἦν, τοῖς δ᾽ ὀργάνοις μεταληφθὲν εἰς χειρουργίαν καὶ κατασκευὴν ἐπιτήδειον μᾶλλον τῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐκτεθειμένης οὕτως ἀναχθείη τὸ προκείμενον. λέγω δὲ τὸ κύβον διπλάσιον εὑρεῖν· οὐ μόνον δὲ διπλάσιος εὑρίσκεται διὰ τοῦ ὑποκειμένου ὀργάνου, ἀλλὰ καὶ καθόλου λόγον ἔχων τὸν ἐπιταχθέντα. κατασκευάσθω γὰρ ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιόν τι περὶ τὸ α σημεῖον οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον ἑστῶτι*[2]*, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινεῖσθαι μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατασκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν; λόγον ἔχοντας περὶ ἀλλήλους δοθέντα. καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας καὶ τῆς βκγ περιφερείας· τοῦτο γὰρ πειράζοντες αἰεὶ καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν αηθκ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ, λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νοείσθω γὰρ ὁ κύκλος προσαναπεπληρωμένος καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη, παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ βδ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ θη, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω*

---

[1]) Die Hdsch. hat *λόγω θεωρούμεθα κατασκευαζόμενα.*

[2]) Die Hdsch. hat *ἔστω τι.*

In dem Vorstehenden kommt es haupt- [*Command. XI.*] sächlich auf Mechanik an. Die Wissenschaft, welche sich der Werkzeuge bedient, hat viele Arten und Abtheilungen; während nämlich manches aus der Mechanik, Gnomonik und Hydromechanik, abstract betrachtet, mit Hülfe von der genannten Wissenschaft construirter Werkzeuge dargethan wird, wird vieles auch ohne die Mechaniker von derselben zu Ende geführt, und gewisse Probleme, die durch die geometrischen Methoden schwer zu behandeln sind, hat sie mit Hülfe von Werkzeugen auf eine leichtere Weise construirt. Sofort wenigstens war das sogenannte delische Problem, das seiner Natur nach körperlich ist, für diejenigen, welche den geometrischen Weg befolgen, zu construiren nicht möglich, da es nicht leicht war die Kegelschnitte in einer Ebene zu beschreiben, dagegen dürfte es mit Hülfe von Werkzeugen auf eine Handarbeit und auf eine bequemere Construction als die von andern angegeben ist, auf folgende Weise zurückgeführt werden. Es soll ein Cubus verdoppelt werden; mittelst des angenommenen Werkzeugs wird aber nicht allein der doppelte Cubus gefunden, sondern auch allgemein der Cubus, der in einem geforderten Verhältniss steht. Man beschreibe nämlich den Halbkreis $\alpha\beta\gamma$, errichte im Mittelpunkt die Senkrechte $\delta\beta$, und es bewege sich eine Regel um den Punkt α, so dass das eine Ende derselben um einen im Punkte α feststehenden Stift sich dreht, der übrige Theil aber sich um diesen Stift als Mittelpunkt zwischen den Punkten β, γ bewegt. Nachdem dies vorbereitet, sei die Aufgabe zwei Cuben zu finden, die zu ein-



δὴ καὶ ἥ τε αλ καὶ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ηαλ ἐν ἡμικυκλίῳ, καὶ κάθετος ἡ αμ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ὡς ἡ γμ πρὸς μα, οὕτω τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη· κοινὸς προσκείσθω λόγος ὁ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ ἄρα συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα καὶ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μη καὶ ἐκ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη· ὁ δὲ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μη καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη κύβον· καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς τὴν μη λόγος αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς αμ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη οὕτως ἡ γδ πρὸς δε, τουτέστιν ἡ βδ πρὸς δε, ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη οὕτως ἡ αδ πρὸς δθ, τουτέστιν ἡ δβ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον.

Πρόβλημα ὀργανικὸν ἐπὶ κυλίνδρου. Τὰ δ' ὀργανικὰ ἐν τοῖς μηχανικοῖς λεγόμενα προβλήματά ἐστιν, ὅτι γίνεται τῆς γεωμετρικῆς ἐξουσίας ἀφαιρούμενα, ἅ οἷά ἐστι καὶ τὰ ἑνὶ διαστήματι γραφόμενα καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ τὰς βάσεις ἀμφοτέρας λελωβημένου κυλίνδρου προτεινόμενον ὑπὸ τῶν ἀρχιτεκτόνων, ἀξιοῦσι γὰρ μέρους ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου δοθέντος, οὗ μηδὲν μέρος ὑγιὲς φυλάσσεται τῶν ἐν ταῖς βάσεσι περιφερειῶν, εὑρεῖν τὸ πάχος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστι τοῦ κύκλου τὴν διάμετρον ἀφ' οὗ τὴν γένεσιν ἔσχεν ὁ κύλινδρος. εὑρίσκεται δὲ μεθοδευθὲν ὑψόσε [1]) οὕτως. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐπιφανείας δύο σημεῖα τὰ α. β καὶ κέντροις αὐτοῖς

---

1) Die Hdsch. hat ὕψος

ander ein gegebenes Verhältniss haben. Man mache $\beta\delta : \delta\varepsilon$ dem gegebenen Verhältniss gleich, ziehe die Linie $\gamma\varepsilon$ und verlängere sie. Es werde nun die Regel zwischen den Punkten β, γ herumgeführt, bis dass der Theil derselben zwischen den Geraden $\zeta\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ dem Theil zwischen der Geraden $\beta\varepsilon$ und der Peripherie $\beta\varkappa\gamma$ gleich wird, was wir durch fortgesetzte Versuche in der Herumführung der Regel leicht bewirken werden. Es sei geschehen, und die Regel habe die Lage $\alpha\eta\vartheta\varkappa$ so dass $\eta\vartheta = \vartheta\varkappa$, so wird der Cubus von $\beta\delta$ zum Cubus von $\delta\vartheta$ das geforderte Verhältniss d. h. $= \beta\delta : \delta\varepsilon$ haben. Man denke sich nämlich den Kreis vervollständigt, verlängere die Linie $\varkappa\delta$ bis λ und ziehe $\lambda\eta$, die zu $\beta\delta$ parallel ist, weil $\varkappa\vartheta = \vartheta\eta$, $\varkappa\delta = \delta\lambda$. Man ziehe ferner $\alpha\lambda$ und $\lambda\gamma$. Da nun $\angle\, \eta\alpha\lambda = R$ als Winkel im Halbkreis und $\alpha\mu$ eine Senkrechte, so ist Quadrat über $\lambda\mu$: Quadrat über $\mu\alpha$ (d. h. $\gamma\mu : \mu\alpha$) = Quadrat über $\alpha\mu$: Quadrat über $\mu\eta$.

Verbindet man hiermit $\alpha\mu : \mu\eta = \alpha\mu : \mu\eta$, so ist das zusammengesetzte Verhältniss aus $\gamma\mu : \mu\alpha$ und $\alpha\mu : \mu\eta$ (d. h. $\gamma\mu : \mu\eta$) gleich dem zusammengesetzten Verhältniss aus dem Quadrat über $\alpha\mu$: Quadrat über $\mu\eta$ und aus $\alpha\mu : \mu\eta$ d. h. gleich dem Cubus von $\alpha\mu$: Cubus von $\mu\eta$, mithin

$\gamma\mu : \mu\eta$ = Cubus von $\alpha\mu$: Cubus von $\mu\eta$.

Aber $\gamma\mu : \mu\eta = \gamma\delta : \delta\varepsilon$ (d. h. $\beta\delta : \delta\varepsilon$)

und $\alpha\mu : \mu\eta = \alpha\delta : \delta\vartheta$ (d. h. $\delta\beta : \delta\vartheta$),

folglich $\beta\delta : \delta\varepsilon$ d. h. das gegebene Verhältniss wie Cubus von $\delta\beta$ zum Cubus von $\delta\vartheta$.

Ein organisches Problem in Betreff des [*Command. XII.*] Cylinders. Diejenigen Probleme unter den mechanischen, welche man organische nennt, sind von der Beschaffenheit, dass sie ausgeführt werden, obwohl ihre geometrische Lösung nicht möglich ist; dahin gehören z. B. die mit einer einzigen Zirkelöffnung beschrieben werden und das von den Architekten vorgelegte in Betreff eines an seinen beiden Grundflächen verletzten Cylinders; sie verlangen nämlich, wenn ein Theil einer Oberfläche eines geraden Cylinders gegeben ist, von dem kein Theil der Umfänge der Grundflächen vollständig vorhanden, die Dicke des Cylinders zu finden d. h. den Durchmesser des Kreises, durch welchen der Cylinder entstanden ist. Es wird, wenn man methodisch in die Höhe geht,

καὶ διαστήματι σεσημειώσθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὸ γ, καὶ πάλιν κέντροις αὐτοῖς τοῖς α, β διαστήματι τοῦ προτέρου μείζονι σεσημειώσθω τὸ δ, καὶ ἄλλῳ διαστήματι τὸ ε καὶ ἄλλῳ τὸ ζ καὶ ἄλλῳ τὸ η. ἔσται δὴ τὰ ε̄ σημεῖα τὰ γ, δ, ε, ζ, η ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διὰ τὸ καὶ τὴν ἐπιζευγνυοῦσαν ἕκαστον αὐτῶν ὡς κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς ἐπιζευγνυούσης εὐθείας τὰ αβ ὡς βάσεως κοινῆς τῶν τριγώνων ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὴν αβ, καὶ ἐν ἑνὶ γενέσαι ἐπιπέδῳ τὰ ε̄ εὐθείας, καὶ δῆλον ὅτι τὰ γ, δ, ε, ζ, η σημεῖα. ταῦτα δὲ εἰς ἐπίπεδον ἐκθησόμεθα οὕτως· ἐκ τριῶν μὲν εὐθειῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ γ, δ, ε, τρίγωνον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ συνεστάτω τὸ θκλ, ἐκ τριῶν δὲ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ δ, ε, ζ τὸ κλμ, ἐκ τριῶν δὲ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ ε, ζ, η σημεῖα τρίγωνον συνεστάτω τὸ λμν· ἔσται ἄρα ἐκκείμενα τὰ θκλ, κλμ, λμν τρίγωνα ἀντὶ τῶν γδε, δεζ, εζη τριγώνων. ἂν δὴ περὶ τὰ θ, κ, λ, μ, ν σημεῖα γράψωμεν ἔλλειψιν, ὁ ἐλάσσων αὐτῆς ἄξων διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου τοῦ τὸν κύλινδρον ἀπεκγεγαμένου.

Ζητουμένου, περὶ πέντε τὰ δοθέντα σημεῖα ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κείμενα τὰ θ, κ, λ, μ, ν ἔλλειψιν γράψαι, περιγεγράφθω, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ μκ, νθ πρότερον ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ δίχα τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν τοῖς α, β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αβ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ε, ζ τῆς ἐλλείψεως σημεῖα, ἡ εζ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς ἐλλείψεως διὰ τὸν ὅρον τῶν κωνικῶν θέσει δεδομένη, δοθὲν γὰρ καὶ ἑκάτερον τῶν α β σημείων τῇ θέσει. ἤχθω διὰ τὸ λ τῇ εζ παράλληλος ἡ λξ καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ξκ, λμ συμπιπτέτωσαν τῇ θν ἐκβληθείσῃ κατὰ τὰ π, ϙ. [δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ κμ, θν, δοθὲν γὰρ ἕκαστον] τῶν κ, μ, θ, ν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ὑπὸ ξδλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μδκ οὕτω τὸ ὑπὸ ξγλ πρὸς ἑκατέραν τῶν ὑπὸ ηγπ, νγθ, ἔσται ἄρα ἴσον τὸ ὑπὸ ηγπ τῷ ὑπὸ νγθ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ὑπὸ νγθ [1]), δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα νγ, γθ· δοθὲν ἄρα τὸ π. ἀλλὰ καὶ τὸ κ,

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. hat ἔσται ἄρα ἴσαν τὸ ὑπὸ νγε.

auf folgende Weise gefunden. Man nehme in der gegebenen Oberfläche zwei Punkte α, β an und bezeichne von ihnen als Mittelpunkten mit einer Zirkelöffnung auf der Oberfläche den Punkt γ; ferner bezeichne man von denselben Mittelpunkten α, β mit einer grösseren Zirkelöffnung als die vorige den Punkt δ, und mit einer andern Zirkelöffnung den Punkt ε, und mit einer andern den Punkt ζ, und mit einer andern den Punkt η, so werden die fünf Punkte γ, δ, ε, ζ, η in einer Ebene liegen, weil die Linie, welche einen jeden der Punkte als die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und die Mitte der Linie $\alpha\beta$ als der gemeinsamen Grundlinie der Dreiecke verbindet, auf $\alpha\beta$ senkrecht steht und diese fünf Geraden in einer Ebene liegen, mithin offenbar auch die fünf Punkte γ, δ, ε, ζ, η. Dies nun werden wir auf folgende Weise auf die Ebene übertragen. Es werde aus den drei Geraden, welche die Punkte γ, δ, ε verbinden, das Dreieck $\vartheta\varkappa\lambda$ in der Ebene gebildet, ferner aus den drei Geraden, welche die Punkte δ, ε, ζ verbinden, das Dreieck $\varkappa\lambda\mu$, und aus den drei Geraden, welche die Punkte ε, ζ, η verbinden, das Dreieck $\lambda\mu\nu$, so werden die Dreiecke $\vartheta\varkappa\lambda$, $\varkappa\lambda\mu$, $\lambda\mu\nu$ an die Stelle der Dreiecke $\gamma\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\zeta\eta$ treten. Wenn wir nun durch die Punkte ϑ, $\varkappa$, λ, μ, ν eine Ellipse beschreiben können, so wird die kleine Axe derselben ein Durchmesser des Kreises sein, der den Cylinder hervorgebracht hat.

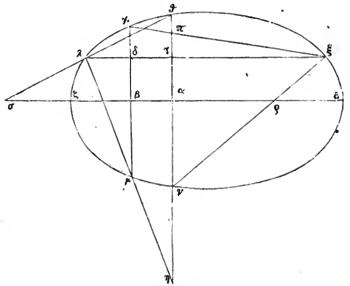
Da gesucht wird, durch fünf gegebene [*Command. XIII.*] Punkte ϑ, $\varkappa$, λ, μ, ν die in einer Ebene liegen, eine Ellipse zu beschreiben, so sei es geschehen. Die Linien $\mu\varkappa$, $\nu\vartheta$ seien zuerst parallel, und eine jede in den Punkten α, β halbirt. Man ziehe $\alpha\beta$ und verlängere sie bis zu den Punkten ε, ζ der Ellipse, so ist $\varepsilon\zeta$ ein Durchmesser der Ellipse, nach der Definition der Kegelschnitte, und zwar der Lage nach gegeben, da ein jeder der Punkte α, β der Lage nach gegeben ist. Man ziehe durch λ zu $\varepsilon\zeta$ die Parallele $\lambda\xi$, ferner die Linien $\xi\varkappa$, $\lambda\mu$, welche die verlängerte $\vartheta\nu$ in den Punkten π, η schneiden. Es sind also die Linien $\varkappa\mu$, $\vartheta\nu$ gegeben, da ein jeder der Punkte $\varkappa$, μ, ϑ, ν gegeben ist. Da nun Rechteck $\xi\delta \, . \, \delta\lambda$: Rechteck $\mu\delta \, . \, \delta\varkappa$ = Rechteck $\xi\gamma \, . \, \gamma\lambda$ zu einem jeden der beiden Rechtecke $\eta\gamma \, . \, \gamma\pi$, $\nu\gamma \, . \, \gamma\vartheta$, so ist Rechteck $\eta\gamma \, . \, \gamma\pi$ = Rechteck $\nu\gamma \, . \, \gamma\vartheta$. Nun ist Rechteck $\nu\gamma \, . \, \gamma\vartheta$ gegeben, da eine jede der $\nu\gamma$, $\gamma\vartheta$ gegeben ist, mithin ist

θέσει ἄρα ἡ κπξ. ἀλλὰ καὶ ἡ λγξ, δοθὲν ἄρα[1]) τὸ ξ, καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ νξ, λθ συμπιπτέτωσαν τῇ εζ διαμέτρῳ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὰ σ, ρ. ἔσται δὴ πάλιν ὡς τὸ ὑπὸ νγθ πρὸς τὸ ὑπὸ ξγλ οὕτω τὸ ὑπὸ ναθ πρὸς ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ρασ, εαζ· καὶ τοῦτο ἴσον τῷ ὑπὸ ρασ, [καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ὑπὸ ρασ.] δοθεῖσαι γάρ εἰσιν αἱ ρα, ασ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ εα, αζ. τῷ δ' ὁμοίῳ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ τὸ [ὑπὸ] εβζ δοθέν, καὶ δοθέντα τὰ α, β, δοθέντα ἄρα καὶ τὰ ε, ζ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, ὥστε ἡ εζ διάμετρος δέδοται τῷ μεγέθει, δηλονότι καὶ ἡ συζύγης αὐτῆς, δέδοται γὰρ ὁ τῆς εζ πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν αὐτῆς λόγος, ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ ὑπὸ εαζ πρὸς τὸ ἀπὸ αν.

---

[1]) So emendirt *Commandin*, die Hdsch. hat γάρ.

der Punkt π gegeben. Aber es ist auch der Punkt $\varkappa$ gegeben,



folglich ist die Linie $\varkappa\pi\xi$ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch die Linie $\lambda\gamma\xi$ gegeben, mithin auch der Punkt ξ, der auf der Ellipse liegt. Man ziehe nun $\nu\xi$, $\lambda\vartheta$, welche den verlängerten Durchmesser $\varepsilon\zeta$ in den Punkten σ, ϱ schneiden. Wiederum ist Rechteck $\nu\gamma \,.\, \gamma\vartheta$: Rechteck $\xi\gamma \,.\, \gamma\lambda$ = Rechteck $\nu\alpha \,.\, \alpha\vartheta$ zu einem jeden der Rechtecke $\varrho\alpha \,.\, \alpha\sigma$, $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$, mithin Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$ = Rechteck $\varrho\alpha \,.\, \alpha\sigma$. Aber Rechteck $\varrho\alpha \,.\, \alpha\sigma$ ist gegeben, da $\varrho\alpha$, $\alpha\sigma$ gegeben sind, mithin ist auch Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$ gegeben. Auf ähnliche Weise wird bewiesen, dass auch Rechteck $\varepsilon\beta \,.\, \beta\zeta$ gegeben ist, und da die Punkte α, β gegeben sind, so sind auch die Punkte ε, ζ gegeben, wie in der Folge dargethan werden wird, daher ist der Durchmesser $\varepsilon\zeta$ der Grösse nach gegeben und offenbar auch der ihm conjugirte Durchmesser, da das Verhältniss der grossen Axe $\varepsilon\zeta$ zu dem Parameter gegehen ist, welches dem Verhältniss von Rechteck $\varepsilon\alpha \,.\, \alpha\zeta$: Quadrat über $\alpha\nu$ gleich ist.

Τὸ ὑπερτεθὲν· ἔστω δοθὲν ἓν ἑκάτερον τῶν ὑπὸ αγβ, αδβ, καὶ δοθέντα τὰ γ, δ· ὅτι τὰ α, β δοθέντα ἐστίν. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ αγβ ἴσον τὸ ὑπὸ δγε, τῷ δὲ ὑπὸ αδβ ἴσον τὸ ὑπὸ γδζ, [ἔσται ἄρα ὡς ἡ γε] πρὸς τὴν εα οὕτως ἡ αζ πρὸς ζδ, διὰ τὴν κατασκευὴν ἑκάτερος λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς γβ πρὸς βδ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ εγ, ζδ τῷ ὑπὸ εαζ, ὥστε καὶ τὸ α σημεῖον· ὁμοίως καὶ τὸ β.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ τῶν ν, ϑ, μ, κ δεδομένα ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως σημεῖα ἐπιζευγνυοῦσαι παράλληλοι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ νκ, μϑ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ι. καὶ διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ μτϑ ἡ λυφ, ἔσται δὴ λόγος τοῦ ὑπὸ νυκ πρὸς τὸ ὑπὸ λυφ [δοθείς], ὁ αὐτὸς γὰρ τῷ ὑπὸ ντκ πρὸς τὸ ὑπὸ μτϑ, καὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ νυκ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ λυφ· καὶ δοθέντα τὰ λ, υ, δοθὲν ἄρα τὸ φ. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ προγεγραμμένον, περὶ πέντε σημεῖα τὰ μ, ν, λ, φ, ϑ γράψαι ἔλλειψιν τὴν νμλφϑ παραλλήλων ὑποκειμένων τῶν μϑ, φλ.

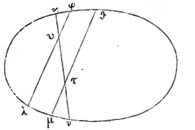
Ῥάδιον δὲ συζυγιῶν διαμέτρων ἐλλείψεως προςϑεισῶν ὡντινωνοῦν, τοὺς ἄξονας αὐτῆς ὀργανικῶς εὑρεῖν. μεϑοδεύσεται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον· ἐκκείσθωσαν αἱ προευρεϑεῖσαι τῆς ἐλλείψεως διάμετροι συζυγεῖς αἱ αβ, γδ δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ μὲν τοῦ α τῇ γδ παράλληλος ἤχθω ἡ ζη. τῷ δὲ ἀπὸ δε ἴσον κείσϑω τὸ ὑπὸ εαϑ, καὶ ἡ εϑ δίχα τετμήσϑω κατὰ τὸ κ, μείζων γάρ ἐστιν ἡ δε τῆς εα· καὶ τῇ εϑ πρὸς ὀρϑὰς ἀπὸ τοῦ κ ἤχϑω [ἡ κλ] καὶ τεμνέτω τὴν ζη κατὰ τὸ λ, καὶ περὶ κέντρον τὸ λ διὰ τοῦ ε γραφομένη κύκλου περιφέρεια τεμνέτω τὴν ηζ κατὰ τὰ ζ, η, καὶ

Das, was im Vorhergehenden angenommen ist, wird so bewiesen. Es sei ein jedes der beiden Rechtecke $\alpha\gamma . \gamma\beta$, $\alpha\delta . \delta\beta$ und die Punkte γ, δ gegeben, so sind auch die Punkte α, β gegeben.



Ist nämlich Rechteck $\delta\gamma . \gamma\varepsilon$ = Rechteck $\alpha\gamma . \gamma\beta$, und Rechteck $\gamma\delta . \delta\zeta$ = Rechteck $\alpha\delta . \delta\beta$, so ist $\gamma\varepsilon : \varepsilon\alpha = \alpha\zeta : \zeta\delta$, da nach der Construction ein jedes der Verhältnisse dem Verhältniss $\gamma\beta . \beta\delta$ gleich ist; mithin Rechteck $\gamma\varepsilon . \zeta\delta$ = Rechteck $\varepsilon\alpha . \alpha\zeta$, daher ist auch der Punkt α gegeben. Auf ähnliche Weise ist auch der Punkt β gegeben.

Es seien nun die Linien, welche die in der Ellipse gegebenen Punkte ν, ϑ, μ, $\varkappa$ verbinden, nicht parallel, und es mögen sich die Linien $\nu\varkappa$, $\mu\vartheta$ im Punkte τ schneiden. Man ziehe durch λ zu $\mu\tau\vartheta$ die Parallele $\lambda\upsilon\varphi$, so wird das Verhältniss von Rechteck $\nu\upsilon . \upsilon\varkappa$: Rechteck $\lambda\upsilon . \upsilon\varphi$ gegeben sein, denn es ist dem Verhältniss von Rechteck $\nu\tau . \tau\varkappa$: Rechteck $\mu\tau . \tau\vartheta$ gleich, und da Rechteck $\nu\upsilon . \upsilon\varkappa$ gegeben ist, so ist auch Rechteck $\lambda\upsilon . \upsilon\varphi$ gegeben; es sind aber die Punkte λ, υ gegeben, mithin auch der Punkt φ. Demnach ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt, durch die fünf Punkte μ, ν, λ, φ, ϑ, unter der Bedingung dass die Linien $\mu\vartheta$, $\varphi\lambda$ parallel sind, die Ellipse $\nu\mu\lambda\varphi\vartheta$ zu beschreiben.



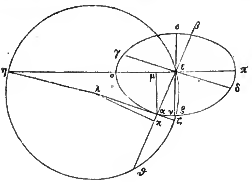
Es ist leicht, wenn irgend welche con- [*Command. XIV.*] jungirte Durchmesser einer Ellipse gezogen sind, die Axen derselben durch organische Construction zu finden. Die Aufgabe wird auf folgende Weise behandelt. Es seien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ die gefundenen conjugirten Durchmesser der Ellipse, welche einander im Punkt ε halbiren, und es sei durch α zu $\gamma\delta$ die Parallele $\zeta\eta$ gezogen. Ferner sei das Quadrat über $\delta\varepsilon$ = Rechteck $\varepsilon\alpha . \alpha\vartheta$, und es werde $\varepsilon\vartheta$ im Punkte $\varkappa$ halbirt, da $\delta\varepsilon > \varepsilon\alpha$. Vom Punkte $\varkappa$ aus sei auf $\varepsilon\vartheta$ die Linie $\varkappa\lambda$ senkrecht gezogen, welche die $\zeta\eta$ im Punkte λ schneidet, und um den Mittelpunkt λ werde durch ε die Peri-

ἐπιζευχθεῖσαι αἱ εζ καὶ εη ἐκβεβλήσθωσαν, κάθετοι ἤχθωσαν ἐπ' αὐτὰς αἱ αμ, αν· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ ηεμ ἴσον κείσθω ἑκάτερον τῶν ἀπὸ εο, επ, τῷ δὲ ὑπὸ [ζεν ἴσον κείσθω ἑκάτερον τῶν ἀπὸ] [1]) ερ, εσ. ἔσονται οὖν εὑρημένοι τῆς ἐλλείψεως ἄξονες οἱ οπ, ρσ, ὧν ὁ ἐλάχιστος ἴσος ἔσται τῷ τοῦ κυλίνδρου πάχει, καθὼς ἐν ἀρχῇ προείρηται.

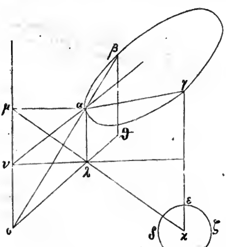
Σφαίρας μετεώρου δοθεῖσαν θέσιν ἐχούσης πρὸς τὸ ὑποκείμενον, εὑρεῖν τὸ σημεῖον ἐφ' ὃ πίπτει καθετικῶς ἐνεχθεῖσα, καὶ καθ' ὃ πίπτει σημεῖον, καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀποτεμνομένην ἀπὸ τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν δύο σημείων τοῦ τε κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κατὰ τὸ ἐπίπεδον. προγράφεται δὲ τό· κύκλου δοθέντος μετεώρου μὴ ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ὑποκείμενον, εὑρεῖν τήν τε κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων καὶ τὴν κλίσιν. ἔστω μετέωρος κύκλος καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτοῦ τρία σημεῖα τὰ α, β, γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι. ἀχθήσονται δὲ οὕτως· ἀπὸ τοῦ γ προςπεσοῦσα εὐθεῖα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὡς ἡ γδ προςενηνέχθω καὶ ψαυέτω τοῦ ἐπιπέδου καθ' ἕτερα δύο σημεῖα τὰ ε, ζ, καὶ εἰλήφθω τοῦ περὶ τὰ δ, ε, ζ κύκλου κέντρον τὸ κ, ἡ οὖν ἀπὸ τοῦ γ κάθετος ἐπὶ τὸ κ σημεῖον πεσεῖται. καὶ δοθὲν ἔσται τὸ γκ. ἤχθωσαν καὶ ἀπὸ τῶν α, β κάθετοι ὁμοίως αἱ βθ, αλ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ κλ, θλ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ γκ πρὸς αλ οὕτως ἡ κμ πρὸς μλ, ὡς δὲ ἡ βθ πρὸς

[1]) Einschaltung von *Commandin*.

pherie eines Kreises beschrieben, welche die $\zeta\eta$ in den Punkten ζ, η schneidet. Man ziehe nun $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\eta$, verlängere sie und fälle auf sie die Senkrechten $\alpha\mu$, $\alpha\nu$. Ferner sei dem Rechteck $\eta\varepsilon \cdot \varepsilon\mu$ ein jedes der Quadrate über εo, $\varepsilon\pi$ gleich, dem Rechteck $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\nu$ ein jedes der Quadrate über $\varepsilon\varrho$, $\varepsilon\sigma$. Alsdann werden $o\pi$, $\varrho\sigma$ als die Axen der Ellipse gefunden sein, von denen die kleinste der Dicke des Cylinders gleich ist, wie zu Anfang gesagt wurde.



Eine Kugel schwebt in einer gegebenen [*Command.* XV.] Lage über einer Ebene, man soll den Punkt finden, auf welchen sie in senkrechter Richtung herabgelassen trifft, und in welchem sie die Ebene trifft, und ferner die kleinste Linie, die auf der Senkrechten zwischen diesen beiden Punkten, dem auf der Oberfläche der Kugel und dem in der Ebene, abgeschnitten wird. Hierzu wird Folgendes vorausgeschickt. Es schwebe über einer Ebene ein Kreis, jedoch so dass die Ebene desselben auf der letzteren nicht senkrecht steht, man soll den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Ebenen und die



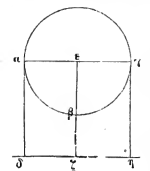
αλ οὕτως ἡ θο πρὸς ολ· δοθέντα ἄρα τὰ μ, ο, ἐφ' ἡμῖν γὰρ ἐστι τοιαύτας καθέτους λαβεῖν ὥστε ἐλαχίστην αὐταῖς εἶναι μίαν ὡς τὴν αλ. εὐθεῖαι ἄρα αἱ μαγ, βαο, καὶ ἔσονται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ αβγ κύκλου, ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου [εὐθεῖά ἐστι ἡμο. ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἡ λν ἐπὶ τὴν μο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αν] κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν μο, πετόρισται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ανλ γωνία τῶν ἐπιπέδων κλίσις.

Τούτου ὄντος, ἔστω σφαῖρα μετέωρος καὶ προσκείσθω τό τε σημεῖον εὑρεῖν ἐφ' ὃ πεσεῖται καθετικῶς ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἐνεχθεῖσα, καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀποτεμνομένην ἀπὸ τῆς καθέτου μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἔστω ἡ σφαῖρα μετέωρος κειμένη περὶ κέντρον τὸ ε καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστός τις ἐγγεγράφθω κύκλος ὁ αβγ. ἤτοι δὴ ἐν ὀρθῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἢ οὔ, γνωσόμεθα δὲ οὕτως· ..... [1]) ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τρία τυχόντα σημεῖα, καθέτους ἄξομεν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὡς μεμαθήκαμεν, τὰ σημεῖα ἐφ' ἃ πίπτουσιν κάθετοι ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις, ὀρθὰ πρὸς ἄλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα, εἰ δὲ μή, κεκλιμένα. ἔστω δὴ πρότερον ὀρθά, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν α, β σημείων κάθετοι, [ἔσονται ἤτοι ἴσαι] ἢ οὔ. ἔστωσαν ἴσαι καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δη τετμήσθω δίχα τῷ ζ, ἔσται δὴ τὸ ζ τὸ ζητούμενον σημεῖον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ διχοτομία τῆς αβγ περιφερείας τὸ β ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐφάρμοζον τῷ ζ, καὶ ἡ βζ ἐλαχίστη κάθετος, ὡς προείρηται.

[1]) Die Hdsch. hat hier ταῖς; es scheint mehreres zu fehlen.

Neigung derselben finden. Man nehme auf dem Kreise drei Punkte α, β, γ an und fälle von ihnen Senkrechte auf die Ebene, was wie folgt geschieht. Eine vom Punkt γ auf die Ebene fallende Grade z. B. $\gamma\delta$ treffe die Ebene noch in zwei andern Punkten ε, ζ, man bestimme den Mittelpunkt $\varkappa$ des Kreises, der durch die Punkte δ, ε, ζ geht, so wird der Fusspunkt der Senkrechten vom Punkte γ in den Punkt $\varkappa$ fallen. Demnach ist $\gamma\varkappa$ gegeben. Man fälle nun auf ähnliche Weise von den Punkten α, β die Senkrechten $\beta\vartheta$, $\alpha\lambda$, ziehe $\varkappa\lambda$, $\vartheta\lambda$ und verlängere sie und es sei $\gamma\varkappa : \alpha\lambda = \varkappa\mu : \mu\lambda$, $\beta\vartheta : \alpha\lambda = \vartheta o : o\lambda$, so sind die Punkte μ, o gegeben, denn wir können die Senkrechten immer so nehmen, dass eine unter ihnen z. B. $\alpha\lambda$ die kleinste ist. Es sind daher $\mu\alpha\gamma$, $\beta\alpha o$ gerade Linien und liegen in der Ebene des Kreises $\alpha\beta\gamma$; es ist demnach μo der gemeinschaftliche Durchschnitt des Kreises mit der Ebene. Fällt man vom Punkte λ auf μo die Senkrechte $\lambda\nu$ und zieht $\alpha\nu$, so steht $\alpha\nu$ senkrecht auf μo, und es ist der Winkel $\alpha\nu\lambda$ als die Neigung der Ebenen gefunden.

Nachdem dies vorausgeschickt, schwebe [*Command. XVI.*] eine Kugel über der Ebene und es soll der Punkt gefunden werden, in welchem sie in senkrechter Richtung herabgelassen die Ebene trifft, und die kleinste Linie, die auf der Senkrechten zwischen der Oberfläche und der Ebene abgeschnitten wird.



Es habe die Kugel den Mittelpunkt ε und es sei auf derselben ein grösster Kreis $\alpha\beta\gamma$ beschrieben. Ob dieser in einer zu der Ebene senkrechten Ebene liegt, oder nicht, werden wir auf folgende Weise erkennen. Fällen wir von drei auf dem Umfange desselben angenommenen Punkten Senkrechte auf die Ebene, wie oben gelehrt ist, und liegen die Punkte, in welche ihre Fusspunkte fallen, in einer geraden Linie, so werden die Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist dies nicht der Fall, so werden sie gegen einander geneigt sein. Stehen sie zuerst senkrecht auf einander, und fällt man von α, β Senkrechte, so werden diese gleich sein oder

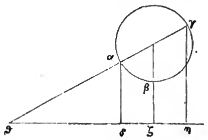
Μὴ ἔστωσαν δὲ ἴσαι αἱ κάθετοι, ἀλλὰ ἐλαχίστη ἡ αδ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ γη πρὸς αδ οὕτως ἡ ηθ πρὸς θδ, ἐκβληθείσης τῆς ηδ· ἔσται δὴ τὸ θ καθ᾿ ὅ ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ α συμπίπτει τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, καὶ δοθεῖσα ἔσται ἥ τε αθ εὐθεῖα καὶ ἡ ὑπὸ αθδ γωνία. τούτων γενομένων, ἐκκείσθω κύκλος ἴσος τῷ μεγίστῳ περὶ διάμετρον τὴν κλ, καὶ προςκείσθω ἡ λμ ἴση τῇ αθ καὶ τῇ ὑπὸ αθδ γωνίᾳ ἴση συνεστάσθω ἡ ὑπὸ κμν, καὶ ἀπὸ τῶν κ, λ κάθετοι αἱ λο, κν, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ σπ, καὶ τῇ μὲν λρ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ αβ, τῇ δὲ οπ εὐθείᾳ ἴση ἡ δζ· τὸ δὲ αὐτὸ ἦν λέγειν δίχα ἡ δη τῷ ζ. ἔσται οὖν τὸ μὲν ζ σημεῖον ἐφ᾿ ὅ ἡ σφαῖρα ἀφαιρουμένη πεσεῖται, τὸ δὲ β ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐλαχίστη κάθετος ἡ βζ [τῇ ρπ] [1]) ἴση ἐστίν.

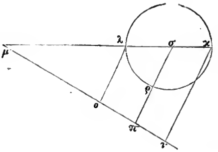
Μὴ ἔστω δὲ ὁ αβγ κύκλος ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ εἰλήφθω ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἡ δθ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ αβγ κύκλου σημεῖα τὰ α, γ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις κείμενα, οὕτως ὥστε τὴν ἐπ᾿ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην τὴν γα συμπίπτειν τῇ κοινῇ τομῇ τῇ δθ, ἔστι γὰρ ἐπ᾿

[1]) Die Hdsch. hat ἡ ἴση.

nicht. Sind sie gleich, und zieht man $\delta\eta$ und halbirt sie in ζ, so ist ζ der gesuchte Punkt in der Ebene, der Punkt β die Mitte des Bogens $\alpha\beta\gamma$ der Punkt der Oberfläche der Kugel, welcher dem Punkt ζ entspricht, und $\beta\zeta$ die kleinste Senkrechte, wie oben gesagt ist.

Sind aber die Senkrechten nicht gleich, und ist $\alpha\delta$ die kleinste, und ist ferner, wenn $\eta\delta$ verlängert wird, $\gamma\eta : \alpha\delta = \eta\vartheta : \vartheta\delta$, so wird ϑ der Punkt sein, in welchem die Linie $\gamma\alpha$ die Ebene schneidet, und es ist sowohl $\alpha\vartheta$ als der Winkel $\alpha\vartheta\delta$ gegeben. Ist dies der Fall, so beschreibe man einen dem grössten Kugelkreise gleichen Kreis mit dem Durchmesser $\varkappa\lambda$; es sei $\lambda\mu = \alpha\vartheta$, $\angle\varkappa\mu\nu = \angle\alpha\vartheta\delta$, und von den Punkten $\varkappa$, λ fälle man die Senkrechten λo, $\varkappa\nu$ und von dem Mittelpunkt die Senkrechte $\sigma\pi$; ferner sei Bogen $\alpha\beta$ = Bogen $\lambda\varrho$, $o\pi = \delta\zeta$; hiermit geschieht aber dasselbe als wenn wir sagten, dass $\delta\eta$ im Punkte ζ halbirt wird. Demnach wird ζ der Punkt sein, in welchem die herabgelassene Kugel die Ebene trifft, β der Punkt der Oberfläche, und die kleinste Senkrechte $\beta\zeta$ ist der $\varrho\pi$ gleich.

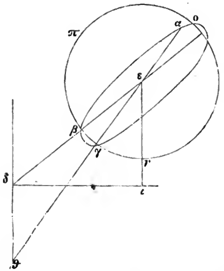


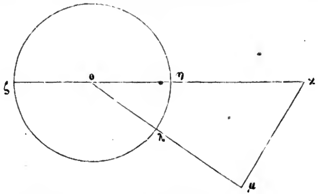


Steht nun die Ebene des Kreises $\alpha\beta\gamma$ nicht senkrecht auf der Ebene, und ist $\delta\vartheta$ der gemeinschaftliche Durchschnitt beider Ebenen, so nehme man auf dem Kreise die α, γ an, so dass sie die Endpunkte eines Durchmessers sind und zwar so, dass die Linie $\gamma\alpha$ den gemeinschaftlichen Durchschnitt $\delta\vartheta$ trifft, was immer

ἐμοὶ διὰ τὸ τὴν δθ ἐν τῷ τοῦ αβγ κύκλου ἐπιπέδῳ εἶναι. συμπιπτέτω κατὰ τὸ θ· δοθεῖσα ἄρα ἡ αθ καὶ ἡ θ γωνία. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν δθ ἡ εβδ. ἀχθήσεται οὕτως· ἐκκείσθω κύκλος ὁ ζλη ἴσος τῷ μεγίστῳ τῷ αβγ περὶ διάμετρον τὴν ζη, καὶ προσκείσθω ἡ ηκ ἴση τῇ γθ, καὶ τῇ ὑπὸ αθδ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ζκμ, καὶ ἀπὸ τοῦ ο κέντρου κάθετος ἡ ολμ, καὶ τῇ μὲν ηλ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ γβ, τῇ δὲ κμ εὐθεῖα ἡ βδ, ἡ δβ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ μλ καὶ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δθ καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ε κέντρον πίπτει· ταῦτα γὰρ δῆλα ἐκ τῆς ὁμοιότητος. ἤχθω δὴ τῇ δθ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ δι, ἡ δθ ἄρα ὀρθὴ πρὸς τὸ διὰ τῶν ε, δ, ι ἐπίπεδον, ὥστε καὶ ὁ αβγ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ διὰ τῶν ε, δ, ι ἐπίπεδον· ἐκβληθὲν ἄρα τὸ διὰ ε, δ, ι ἐπίπεδον κύκλον ποιήσει ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστον ὀρθὸν πρὸς τὸν αβγ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ πίπτοντα καὶ διὰ τῶν β, ο σημείων, ὥστε ἐὰν τοῦ αβγ τὸν πόλον λαβόντες τὸν π διὰ τῶν π καὶ ἑκατέρου τῶν β, ο γράψωμεν κύκλον, οὕτως ἔσται ὁ γινόμενος μέγιστος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὑπὸ δὲ τοῦ διὰ τῶν ε, δ, ι ἐπιπέδου. γεγράφθω βπο, καὶ ἐκκείσθω πάλιν κύκλος ὁ ρντ περὶ διάμετρον τὴν ρτ καὶ προσκείσθω ἡ ρφ ἴση τῇ βδ καὶ τῇ ὑπὸ βδι γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ρφξ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κέντρου κάθετος ἡ λνξ καὶ τῇ μὲν ρν περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἐπὶ τοῦ πβο κύκλου ἡ βυ, τῇ δὲ φξ ἴση ἡ δι. ἐπεζεύχθω ἄρα ἡ ιυ, ἴση ἔσται τῇ ξν καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ε κέντρον πεσεῖται καὶ ἔσται κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ἔστι καὶ ἐπὶ τὴν ιδ. τὸ μὲν ἄρα ι σημεῖον ἔσται ἐφ' ὃ πίπτει [ἡ σφαῖρα, καὶ τὸ υ καθ' ὃ πίπτει], ἡ δὲ ἐλαχίστη κάθετος ἡ ιυ.

möglich ist, da $\delta\vartheta$ in der Ebene des Kreises liegt. Der Durchschnittspunkt sei ϑ, so ist $\alpha\vartheta$ und der Winkel ϑ gegeben. Man fälle nun von dem Mittelpunkt ε auf $\delta\vartheta$ die Senkrechte $\varepsilon\beta\delta$, was auf folgende Weise geschieht: Um den Durchmesser $\zeta\eta$ sei der Kreis $\zeta\lambda\eta$, der dem grössten Kugelkreise gleich ist, beschrieben; es sei $\eta\varkappa = \gamma\vartheta$, $\angle \zeta\varkappa\mu = \angle \alpha\vartheta\delta$; vom Mittelpunkt o sei die Senkrechte $o\lambda\mu$ gefällt, und Bogen $\eta\lambda$=Bogen $\gamma\beta$ $\varkappa\mu = \beta\delta$, so ist $\beta\delta = \mu\lambda$ und senkrecht auf $\vartheta\delta$ und trifft verlängert den Mittelpunkt ε, was aus der Aehnlichkeit folgt. Zieht man nun



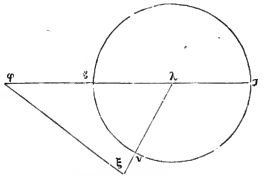


in der Ebene auf $\delta\vartheta$ die Linie $\delta\iota$ senkrecht, so steht die Linie $\delta\vartheta$ auf der durch ε, δ, ι gelegten Ebene senkrecht, daher ist auch der Kreis $\alpha\beta\gamma$ auf der durch ε, δ, ι gelegten Ebene senkrecht.

Σφαίρας ὑποκειμένης καὶ σημείου δοθέντος ἐκτὸς αὐτῆς, εὑρεῖν τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν. Ἔστι δὲ φανερὸν· ἂν γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ δοθέντος εὐθεῖα προσπεσοῦσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν περιενεχθῇ καὶ αὕτη γράψει κύκλον, καὶ πόλος αὐτοῦ τὸ ζητούμενον ἔσται σημεῖον.

Ὑποκείσθω πάλιν ἡ σφαῖρα καὶ δύο σγμεῖα δεδόσθω τῇ ἐπιφανείᾳ ἐκτὸς ἀμφότερα, καὶ προσκείσθω τὰ σημεῖα λαβεῖν καθὰ ἡ ἐπὶ τὰ δοθέντα ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν. Κείσθω γὰρ ἡ σφαῖρα περὶ κέντρον τὸ β, καὶ τὰ δοθέντα σημεῖα ἐκτὸς ἔστω τὰ α, γ, καὶ καθ' ἃ συμβάλλουσιν τῇ ἐπιφανείᾳ αἱ ἀπὸ τῶν α, γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνύμε-

Erweitert man nun die durch ε, δ, ι gelegte Ebene, so wird sie die Kugel in einem grössten Kreise schneiden, der auf dem Kreise $\alpha\beta\gamma$ senkrecht steht, durch die Pole desselben geht und ihn in den Punkten β, o schneidet, so dass wenn wir π als den Pol des Kreises $\alpha\beta\gamma$ nehmen und durch ihn und die Punkte β, o einen Kreis beschreiben, derselbe der grösste Kugelkreis sein und in der Ebene ε, δ, ι liegen wird. Es sei also der Kreis $\beta\pi o$ beschrieben; man construire nun wiederum den Kreis $\varrho\nu\tau$ um den Durchmesser $\varrho\tau$, ferner sei $\varrho\varphi = \beta\delta$, $\angle \varrho\varphi\xi = \angle \beta\delta\iota$; vom Mittelpunkt λ sei die Senkrechte $\lambda\nu\xi$ gefällt, Bogen βv des Kreises $\pi\beta o$ = Bogen $\varrho\nu$, $\varphi\xi = \delta\iota$, so wird, wenn man ιv zieht, $\iota v = \xi\nu$ sein und verlängert den Mittelpunkt ε treffen und auf der Ebene, mithin auch auf $\delta\iota$ senkrecht stehen. Der Punkt ι wird also der Punkt sein, auf welchen die Kugel fällt, der Punkt v, in welchem sie fällt, und ιv die kleinste Senkrechte.



Es ist eine Kugel und ausserhalb [*Command. XVII.*] derselben ein Punkt gegeben; man soll den Punkt finden, in welchem die Linie, welche den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkt verbindet, die Oberfläche der Kugel schneidet.

Dies ist sehr leicht; wenn nämlich die Gerade, die von dem gegebenen Punkt bis zur Oberfläche gezogen ist, auf der Oberfläche herumgeführt wird und einen Kreis beschreibt, so ist der Pol desselben der Punkt, welcher gesucht wird.

Es sind wiederum eine Kugel und [*Command. XVIII.*] zwei Punkte ausserhalb der Oberfläche gegeben; man soll die Punkte finden, in welchen die Linie, welche die gegebenen Punkte verbindet, die Oberfläche der Kugel schneidet.

Der Mittelpunkt der Kugel sei β, die ausserhalb derselben gegebenen Punkte α, γ, und δ, ε die Punkte, in welchen die von

ναι εἰλήφθω σημεῖα τὰ δ, ε, γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ δεζη, δοθεῖσαι ἄρα αἱ αδ, γε, . . . λῆπται [1]) γάρ, καὶ διὰ τὸ δεδόσθαι τὴν ἐκ τῆς σφαίρας τοῦ β κέντρου, καὶ ὅλαι δοθήσονται αἱ αβ, γβ· ἔσιι δὲ καὶ ἡ τὰ δοθέντα ἐπιζευγνύουσα ἡ αγ δοθεῖσα. ἐκ τριῶν οὖν τῶν αβ, αγ, γβ τρίγωνον συνεστάτω τὸ θκλ, καὶ περὶ κέντρον τὸ θ γεγράφθω κύκλος ἴσος τῷ εδζη ὁ σμνο. ἐὰν μὲν οὗτος τέμνῃ τὴν κλ, δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν σφαῖραν εἰ δὲ μὴ, οὐ τέμνει. τεμνέτω οὖν ὁ κύκλος τὴν κλ κατὰ τὰ μ, ν, καὶ τῇ μὲν σμ περιφερείᾳ, ἴση ἀπειλήφθω ἡ δη, τῇ δὲ ον ἡ εζ, φανερὸν δὴ ὅτι τὰ η, ζ σημεῖα ἔσται καθ' ἃ τέμνει ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ α, γ σημεῖα τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφά-

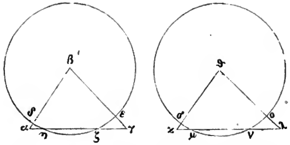
Χρήσιμα καὶ τὰ ἐν τοῖς ἰδίοις λεγομένοις ὀργανικοῖς καὶ μάλιστα ὅταν ἐπὶ τὸ εὔκολον ὑπὸ τῆς ἀναλύσεως χειραγωγούμενα τὴν ἀνάλογον πεῖραν διαφεύγειν δύνηται, οἷον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑπτὰ ἑξάγωνα ἐγγράψαι, τὸ μὲν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ κύκλῳ, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ ἀπὸ μὲν τῶν τοῦ μέσου πλευρῶν ἀναγεγραμμένα, τὰς δὲ ἀντικειμένας πλευρὰς ἔχοντα ἐνηρμοσμένας ἑκάστην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ [2]). Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος περὶ κέντρον τὸ η, καὶ κείσθω περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἑξαγώνου πλευρὰ ἡ θκ, οὕτως ἔσται [3]) τὸ ἀπὸ τῆς θκ ἀναγραφὲν ἑξάγωνον τὴν μν πλευρὰν ἔχειν ἐνηρμοσμένην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηκ, ἐπ' εὐθείας ἄρα

---

[1]) Das Wort ist in der Hdsch. nicht vollständig.

[2]) Die Hdsch. hat *τὰ δὲ ἀντικειμένας . . . τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν*.

[3]) So die Hdsch. vielleicht ist zu lesen *ὥστε*.



α, γ nach β gezogenen Linien die Oberfläche der Kugel schneiden. Beschreibt man den grössten Kreis $\delta\varepsilon\zeta\eta$, so sind $\alpha\delta$, $\gamma\varepsilon$ gegeben ...... und weil der Halbmesser der Kugel gegeben ist, so sind auch die ganzen Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ gegeben; es ist aber auch $\alpha\gamma$, welche die gegebenen Punkte verbindet, gegeben. Man construire nun aus den drei Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ das Dreieck $\vartheta\varkappa\lambda$ und beschreibe um ϑ als Mittelpunkt den Kreis $\sigma\mu\nu o$, der dem Kreise $\varepsilon\delta\zeta\eta$ gleich ist. Schneidet dieser Kreis die Linie $\varkappa\lambda$, so schneidet offenbar auch die Linie $\alpha\gamma$ die Kugel; ist jenes nicht der Fall, so wird auch die Linie $\alpha\gamma$ die Kugel nicht schneiden. Es schneide nun der Kreis die Linie $\varkappa\lambda$ in den Punkten μ, ν, und es sei Bogen $\delta\eta$ = Bogen $\sigma\mu$, Bogen $\varepsilon\zeta$ = Bogen $o\nu$, so werden offenbar η, ζ die Punkte sein, in welchen die Linien, welche die Punkte α, γ verbindet, die Oberfläche der Kugel schneidet.

Auch die unter den eigentlich soge- [*Command. XIX.*] nannten organischen Constructionen sind nützlich, besonders wenn sie hinreichend von der Analysis unterstützt im Stande sind das entsprechende Probiren zu vermeiden, z. B. in einen gegebenen Kreis sieben (reguläre) Sechsecke einzuschreiben, so dass das eine denselben Mittelpunkt mit dem Kreise hat, die übrigen sechs auf den Seiten des mittleren stehen und eine jede der diesen gegenüberliegenden Seiten in die Peripherie des Kreises eingefügt ist.

Der gegebene Kreis habe den Mittelpunkt η, $\vartheta\varkappa$ sei die Seite des um denselben Mittelpunkt beschriebenen Sechsecks, so dass das auf der Seite $\vartheta\varkappa$ stehende Sechseck die Seite $\mu\nu$ in die Peripherie des Kreises eingefügt enthält. Zieht man $\eta\varkappa$, so liegt diese mit der Seite $\varkappa\lambda$ des Sechsecks in einer geraden Linie, da

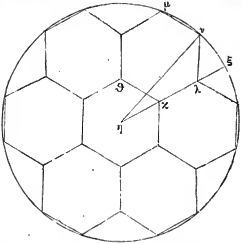
ἐστὶν τῇ κλ πλευρᾷ τοῦ ἑξαγώνου, διὰ τὸ δυμοίρου μὲν εἶναι τὴν ὑπὸ ηκθ, ὀρθῆς δὲ καὶ τρίτου τὴν ὑπὸ θκλ. ἐπεζεύχθω ἡ ην, ἐπεὶ ἴσαι αἱ ηκ, κλ, διπλῆ ἐστιν ἡ ηλ τῆς λν, καὶ δοθεῖσα ἡ λ γωνία, ὀρθῇ γὰρ καὶ τρίτου [1]), δοθὲν ἄρα τὸ ηλν τρίγωνον τῷ εἴδει, λόγος ἄρα τῆς ην πρὸς νλ· καὶ δοθεῖσα ἡ ην, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ νλ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου. Τὸ δὲ ὀργανικὸν οὕτως· ἐκκείσθω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τρίτον μέρος ἡ αγ, καὶ ἀπ᾽ [2]) αὐτῆς τμῆμα κύκλου τὸ αβγ γωνίαν δεχόμενον δίμοιρον ὀρθῆς, καὶ οἵων ἐστὶν ἡ αε θ, τοιούτων δ ἀπειλήφθω ἡ γε, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ βε· λέγω ὅτι ἡ αβ ἐπιζευχθεῖσα ἴση ἐστὶν τῇ θκ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ. ἐκβεβλήσθω ἡ βγ καὶ τῇ αβ ἴση ἀφῃρήσθω ἡ βδ, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβδ, καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἡ αζ. ἐπεὶ ἡ αε πρὸς εγ λόγον ἔχει ὃν τὰ θ πρὸς τέσσαρα ἕξει, καὶ τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡμιολία ἄρα ἡ αβ, τουτέστιν ἡ βδ [τῆς βγ], διπλῆ ἄρα ἡ βγ τῆς γδ. ἀλλὰ καὶ ἡ ζγ τῆς γα, καὶ ἡ ζδ ἄρα ἐπιζευχθεῖσα τῆς αδ, τουτέστι τῆς αβ, ἔστι διπλῆ. ἦν δὲ καὶ ἡ ηλ τῆς λν διπλῆ, καὶ ἴσας περιέχουσι γωνίας, ὅμοιον ἄρα τὸ αβζ τρίγωνον τῷ ηνλ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ αζ τῇ νη, ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ τῇ λν ἢ τῇ θκ.

---

[1]) Vielleicht zu lesen τρίτῳ.

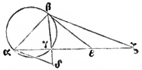
[2]) Vielleicht zu lesen ἐπ᾽.

$\angle\ \eta\varkappa\vartheta = \frac{2}{3}$ R und $\angle\ \vartheta\varkappa\lambda = \frac{4}{3}$ R. Zieht man ferner $\eta\nu$, so



ist, da $\eta\varkappa = \varkappa\lambda$, $\eta\lambda = 2\ \lambda\nu$, und $\angle\ \lambda$ gegeben ist, denn er ist $= \frac{4}{3}$ R, auch Dreieck $\eta\lambda\nu$ der Form nach gegeben, mithin auch das Verhältniss $\eta\nu : \nu\lambda$; aber es ist $\eta\nu$ gegeben, mithin auch $\nu\lambda$, die Seite des Sechsecks.

Die organische Construction geschieht auf folgende Weise. Es sei $\alpha\gamma$ der dritte Theil des Halbmessers des Kreises, über derselben werde ein Kreisabschnitt $\alpha\beta\gamma$ beschrieben, der einen Winkel $= \frac{2}{3}$ R fasst, und von den neun Theilen, welche auf die Linie $\alpha\varepsilon$ kommen, enthalte $\gamma\varepsilon$ vier Theile; ferner ziehe man die Tangente $\beta\varepsilon$, so wird behauptet, dass die Linie, welche die Punkte α, β verbindet, gleich der Seite $\vartheta\varkappa$ des Sechsecks ist. Man verlängere $\beta\gamma$, mache $\beta\delta = \alpha\beta$, es ist mithin das Dreieck $\alpha\beta\delta$ gleichseitig, und $\alpha\zeta$ sei gleich dem Radius des Kreises. Da $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = 9 : 4$ und Quadrat über $\alpha\beta$: Quadrat über $\beta\gamma = 9 : 4$, so ist $\alpha\beta$ d. h. $\beta\delta = \frac{3}{2}\,\beta\gamma$, mithin $\beta\gamma = 2\ \gamma\delta$; aber auch $\zeta\gamma = 2\ \gamma\alpha$, mithin $\zeta\beta = 2\ \alpha\delta = 2\ \alpha\beta$. Es war nun $\eta\lambda = 2\ \lambda\nu$, und da sie gleiche Winkel einschliessen, so ist $\triangle\ \alpha\beta\zeta \sim \triangle\ \eta\nu\lambda$. Da aber $\alpha\zeta = \nu\eta$, so ist $\alpha\beta = \lambda\nu = \vartheta\varkappa$.



Τὸ αὐτὸ ἄλλως σαφέστερον. ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δοθέντος κύκλου ἡ αζ, καὶ ἀπειλήφθω αὐτῆς τὸ γ̄ μέρος, καὶ ἔστω ἡ αγ ἐφ᾽ ἧς τμῆμα κύκλου γεγράφθω τὸ αβγ δεχόμενον γωνίαν διμοίρου ὀρθῆς, καὶ οἵων ἐστὶν ἡ αγ ε, τοιούτων [δ] ἀπειλήφθω [ἡ γε, καὶ ἤχθω] ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος ἡ εβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἥ τε αβ καὶ ἡ ζβ, καὶ ἔτι ἐπιζευχθεῖσα ἡ βγ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ βδ καὶ ἐπεζεύχθω [ἡ αδ]. ἐπεὶ οὖν εἰς κύκλον διήχθωσαν ἥ τε εγα καὶ ἡ εβ, καὶ ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ἄρα ὑπὸ αεγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς εβ οὕτως ἡ βε πρὸς γε, ἰσογώνιον ἄρα τὸ γβε τρίγωνον τῷ αβε τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς αβ [οὕτως] ἡ εβ πρὸς βγ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ [οὕτω] τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τῆς βγ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ οὕτως ἐστὶν ἡ αε πρὸς εγ, α τοῦ ϛ̄. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εγ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βγ λόγον ἔχει ὃν τὰ θ̄ πρὸς δ, ἡμιολία ἄρα ἡ βδ τῆς βγ, διπλασία ἡ βγ τῆς γδ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ζγ τῆς γα διπλασία, ὡς ἄρα ἡ ζλ πρὸς γα [οὕτως] ἡ βγ πρὸς γδ, καὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ γ γωνίαι, ἴση ἄρα καὶ ἡ μὲν δ γωνία τῇ ὑπὸ ζβγ, ἡ δε ζ τῇ ὑπὸ γαδ· ἔσιιν ἄρα ὡς ἡ ζβ πρὸς βγ οὕτως ἡ αδ πρὸς δγ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζβ πρὸς αδ οὕτως ἡ βγ πρὸς γδ. διπλασία δὲ ἡ βγ τῆς γδ, διπλασία ἄρα καὶ ἡ ζβ τῆς αδ, τουτέστι τῆς αβ. καὶ ἔστι διμοίρου [ἡ] δ. διμοίρου ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ αβζ μιᾶς ὀρθῆς καὶ γ̄. ἐὰν οὖν ἐχώμεθα κύκλον, οὗ κέντρον τὸ η, ἴσον ἔχοντα τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αζ εὐθείᾳ, καὶ διαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τὴν ηξ εὐθεῖαν, καὶ ἴσην θῶμεν τῇ ζβ τὴν ηλ εὐθεῖαν, καὶ πρὸς τὴν ηλ εὐθεῖαν καὶ τῷ λ σημείῳ ἴσην γωνίαν συστησώμεθα τὴν ὑπὸ ηλν τῇ ὑπὸ ζβα, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ην, ἰσογώνιον γίνεται τὸ ηλν τρίγωνον τῷ αζβ τριγώνῳ· καὶ ἔστιν ἡ αζ ἴση τῇ ην, ἴση ἄρα καὶ ἡ νλ τῇ αβ. καὶ φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ αβ εὐθείᾳ γίνεται ἡ τῶν ζ̄ εἰς τὸν κύκλον ἑξαγώνων ἐγγραφή.

Πῶς δὲ καὶ ἡ τῶν προειρημένων τυμπάνων γίνεται παράθεσις, νῦν ἐροῦμεν. ἔστω γὰρ δύο τύμπανα ἔντορνα καὶ

Ebendasselbe deutlicher. Es sei $\alpha\zeta$ = dem Radius des Kreises, man schneide auf ihm den dritten Theil ab = $\alpha\gamma$, über dieser Linie werde ein Kreisabschnitt $\alpha\beta\gamma$ beschrieben, der einen Winkel = $\frac{2}{3}$ R fasst und von den fünf Theilen, die auf $\alpha\gamma$ kommen, enthalte $\gamma\varepsilon$ vier Theile. Man ziehe an den Kreisabschnitt die Tangente $\varepsilon\beta$, ziehe $\alpha\beta$, $\zeta\beta$, $\beta\gamma$ und verlängere die letztere bis δ, es sei $\beta\delta = \alpha\beta$, und ziehe $\alpha\delta$. Da nun die Linien $\varepsilon\gamma\alpha$, $\varepsilon\beta$ an den Kreis gezogen sind, von welchen die eine den Kreis schneidet, die andere ihn berührt, so ist Rechteck $\alpha\varepsilon \,.\, \varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\varepsilon\beta$, mithin $\alpha\varepsilon : \varepsilon\beta = \beta\varepsilon : \gamma\varepsilon$, folglich $\triangle\ \gamma\beta\varepsilon$ mit $\triangle\ \alpha\beta\varepsilon$ gleichwinklig. Daher ist $\alpha\varepsilon : \alpha\beta = \varepsilon\beta : \beta\gamma$, folglich Quadrat über $\alpha\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\beta$ = Quadrat über $\alpha\beta$: Quadrat über $\beta\gamma$; aber Quadrat über $\alpha\varepsilon$: Quadrat über $\varepsilon\beta = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$ (Elemente VI. 1), mithin $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$ = Quadrat über $\alpha\beta$ (d. h. Quadrat über $\delta\beta$) : Quadrat über $\beta\gamma$, folglich Quadrat über $\delta\beta$: Quadrat über $\beta\gamma = 9 : 4$,

demnach $\delta\beta = \frac{3}{2}\,\beta\gamma$, $\beta\gamma = 2\,\gamma\delta$;

es ist aber $\zeta\gamma = 2\,\gamma\alpha$,

mithin $\zeta\gamma : \gamma\alpha = \beta\gamma : \gamma\delta$,

und da die Winkel bei γ einander gleich sind,

so ist $\angle\ \delta = \angle\ \zeta\beta\gamma$, $\angle\ \zeta = \angle\ \gamma\alpha\delta$,

daher $\zeta\beta : \beta\gamma = \alpha\delta : \delta\gamma$

oder $\zeta\beta : \alpha\delta = \beta\gamma : \gamma\delta$;

aber $\beta\gamma = 2\,\gamma\delta$, mithin $\zeta\beta = 2\,\alpha\delta = 2\,\alpha\beta$.

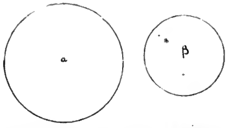
Nun ist $\angle\ \delta = \frac{2}{3}$ R, folglich auch $\angle\ \zeta\beta\gamma = \frac{2}{3}$ R, und $\angle\ \alpha\beta\zeta = \frac{4}{3}$ R.

Haben wir nun einen Kreis mit dem Mittelpunkt η, dessen Radius $= \alpha\zeta$, ziehen vom Mittelpunkt aus die Linie $\eta\xi$, nehmen $\eta\lambda = \zeta\beta$, legen an $\eta\lambda$ im Punkte λ den Winkel $\eta\lambda\nu = \angle\ \zeta\beta\alpha$ an, ziehen $\eta\nu$, so ist das Dreieck $\eta\lambda\nu$ mit dem Dreieck $\alpha\zeta\beta$ gleichwinklig. Es ist aber $\alpha\zeta = \eta\nu$, mithin auch $\nu\lambda = \alpha\beta$. Demnach ist deutlich, dass die Einschreibung der sieben Sechsecke in den Kreis mit Hülfe der Linie, die $= \alpha\beta$ ist, geschieht.

Wir wollen jetzt erörtern, wie die Aneinanderfügung der oben erwähnten Scheiben geschieht. Es seien [*Command.* XX.]

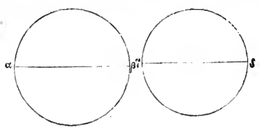
παρακείμενα ἀλλήλοις τὰ α, β, καὶ ἔστω ὡς ἡ διάμετρος τοῦ α πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ β οὕτω τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β· οὕτω γὰρ ἡ παράθεσις τῶν τυμπάνων σώζεται, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περίμετρον οὕτω τὴν διάμετρον πρὸς τὴν διάμετρον· τοῦτο γὰρ ἑξῆς. ὑποκείσθω δὴ τὸ α ὀδόντων ξ, τὸ δὲ β ὀδόντων τεσσαράκοντα, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ τάχος τοῦ α πρὸς τὸ τάχος τοῦ β οὕτω τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α. ἐπεὶ γὰρ παράκειται ἀλλήλοις τὰ α, β, ὅσους ἐὰν ὀδόντας κινηθῇ τὸ β, τοσούτους ὀδόντας κινήσεται καὶ τὸ α· ὅταν ἄρα τὸ β στρεφόμενον μίαν ἀποκατάστασιν ποιήσεται, τότε τὸ α μ ὀδόντας κινηθήσεται, ὥστε καὶ ὅταν τὸ β ξ ἀποκαταστάσεις ποιήσεται, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α, τότε τὸ α ὀδόντας κινηθήσεται ͵βυ, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὅταν τὸ α μ ἀποκαταστάσεις ποιήσεται, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τοῦ β, τότε τὸ β ὀδόντας κεκινημένον ͵βυ, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β. ὅταν ἄρα τὸ α ἀποκαταστάσεις ποιήσεται μ. ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β, τότε καὶ τὸ β ἀποκαταστάσεις ποιήσεται ξ, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τάχος τοῦ α πρὸς τὸ τάχος τοῦ β οὕτω τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ β πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α.

Ὅτι δὲ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι, νῦν δείξομεν. ἔστωσαν γὰρ δύο κύκλοι οἱ αβ, γδ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ αβ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ γδ κύκλου περιφέρειαν οὕτως ἡ αβ διάμετρος πρὸς τὴν γδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ αβ κύκλος πρὸς τὸν γδ κύκλον οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, ἀλλὰ τοῦ μὲν αβ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς αβ διαμέτρου καὶ τῆς αβ περιφερείας, τοῦ τε γδ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῆς γδ καὶ τῆς τοῦ γδ περιφερείας,



α, β zwei runde, an einander gefügte Scheiben, und es verhalte sich der Durchmesser von α zum Durchmesser von β wie die Anzahl der Zähne von α zu der Anzahl der Zähne von β; so nämlich gelingt die Aneinanderfügung der Scheiben, weil die Umfänge der Kreise wie die Durchmesser sich verhalten, wovon weiter unten. Es habe [*Command. XXI.*] nun die Scheibe α 60 Zähne, die Scheibe β deren 40, so wird behauptet, dass die Geschwindigkeit von α zu der Geschwindigkeit von β sich verhält wie die Anzahl der Zähne von β zu der Anzahl der Zähne von α. Da die Scheiben α, β an einander gefügt sind, so wird, um wie viele Zähne α bewegt wird, um ebenso viele Zähne auch β bewegt werden; macht also β eine vollständige Umdrehung, so wird α um 40 Zähne bewegt werden, so dass, wenn β 60 Umdrehungen gemacht hat (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von α), α um 2400 Zähne bewegt sein wird (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von α in die der Zähne von β). Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass wenn α 40 Umdrehungen macht (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von β), β um 2400 Zähne bewegt worden ist (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von α in die der Zähne von β). Wenn also α 40 Umdrehungen gemacht hat (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von β), so wird β 60 Umdrehungen gemacht haben (so viel beträgt die Anzahl der Zähne von α), mithin verhält sich die Geschwindigkeit von α zur Geschwindigkeit von β wie die Anzahl der Zähne von β zur Anzahl der Zähne von α.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die [*Command. XXII.*] Umfänge der Kreise sich wie die Durchmesser verhalten. Hat man die



beiden Kreise $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, so wird behauptet, dass die Peripherie des Kreises $\alpha\beta$ zu der Peripherie des Krei-

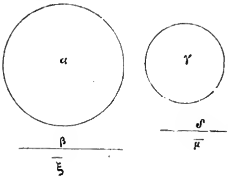
τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἐμβάδου τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης καὶ ὡς ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ δέδεικται καὶ ὑφ' ἡμῶν δι' ἑνὸς θεωρήματος. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς αβ καὶ τῆς περιφερείας τοῦ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς γδ κύκλου περιφερείας [καὶ τῆς γδ] οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ αβ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ αβ οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ γδ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ αβ κύκλου περιφέρεια [πρὸς τὴν αβ οὕτω ἡ τοῦ γδ περιφέρεια] πρὸς τὴν γδ, τοῦτο γὰρ μικρόν ἐστιν ἐν τοῖς στοιχείοις λαμβανόμενον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ τοῦ αβ περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ γδ περιφέρειαν οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γδ.

Τυμπάνου δοθέντος καὶ τοῦ πλήθους τῶν ὀδόντων αὐτοῦ, ἐπιτετάχθω παραθεῖναι αὐτῷ τύμπανον δοθὲν ἔχον τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων καὶ εὑρεῖν τὴν διάμετρον τοῦ παρατιθεμένου τυμπάνου. Ἔστω τύμπανον τὸ α, οὗ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων ἔστω ὁ β ἀριθμὸς μ°ξ, καὶ παρακείσθω τῷ α τὸ γ τύμπανον οὗ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων ἔστω ὁ δ ἀριθμὸς μ°μ, δεῖ δὴ τοῦ γ τὴν διάμετρον εὑρεῖν. ἐπεὶ οὖν ὁ β ἀριθμὸς πλῆθός ἐστιν ὀδόντων τοῦ α, ὁ δὲ δ πλῆθός ἐστιν ὀδόντων τοῦ γ, καὶ ἔστιν τὸ μὲν πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α ἡ περίμετρος αὐτῶν τοῦ ....[1]) ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β ἀριθμὸς πρὸς τὸν δ οὕτως ἡ περίμετρος τοῦ α πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ γ· ἀλλ' ὡς ἡ περίμετρος πρὸς τὴν περίμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον, λόγος δὲ τοῦ β ἀριθμοῦ πρὸς τὸν δ

[1]) Hier ist in der Hdsch. offenbar eine Lücke. Auch *Commandin's* Hdsch. hat eine solche gehabt, denn er übersetzt: estque multitudo dentium tympani C ipsius circumferentia. Der Zusammenhang verlangt: *ἔστιν τὸ μὲν πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ α ἡ περίμετρος αὐτοῦ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ γ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.*

ses $\gamma\delta$ sich verhält wie der Durchmesser $\alpha\beta$ zum Durchmesser $\gamma\delta$. Da nämlich der Kreis $\alpha\beta$ zum Kreis $\gamma\delta$ sich verhält wie das Quadrat über dem Durchmesser $\alpha\beta$ zum Quadrat über dem Durchmesser $\gamma\delta$, das Vierfache des Kreises $\alpha\beta$ aber dem Rechteck aus dem Durchmesser $\alpha\beta$ und aus der Peripherie des Kreises $\alpha\beta$, und das Vierfache des Kreises $\gamma\delta$ dem Rechteck aus dem Durchmesser $\gamma\delta$ und dem Umfange des Kreises $\gamma\delta$ gleich ist (denn das Rechteck aus dem Radius und aus der Peripherie des Kreises ist gleich dem doppelten Inhalt des Kreises, wie von Archimedes, und in dem Scholium zum ersten Buch der Mathematika, und wie auch von uns mittelst eines einzigen Lehrsatzes gezeigt worden ist), so verhält sich das Rechteck aus dem Durchmesser $\alpha\beta$ und der Peripherie des Kreises $\alpha\beta$ zu dem Rechteck aus dem Durchmesser und dem Umfang des Kreises $\gamma\delta$ wie Quadrat über $\alpha\beta$: Quadrat über $\gamma\delta$, daher Rechteck aus dem Umfang und dem Durchmesser $\alpha\beta$ zum Quadrat über $\alpha\beta$ wie Rechteck aus dem Umfang und dem Durchmesser des Kreises $\gamma\delta$ zum Quadrat über $\gamma\delta$, mithin Umfang des Kreises $\alpha\beta$ zum Durchmesser $\alpha\beta$ wie Umfang des Kreises $\gamma\delta$ zum Durchmesser $\gamma\delta$ (was in den Elementen als etwas Einfaches behandelt wird), folglich Umfang des Kreises $\alpha\beta$ zum Umfang des Kreises $\gamma\delta$ wie Durchmesser $\alpha\beta$ zum Durchmesser $\gamma\delta$.

Es ist eine Scheibe und die Anzahl [*Command. XXIII.*] der Zähne derselben gegeben, an dieselbe soll eine Scheibe mit einer gegebenen Anzahl Zähne angefügt werden, man sucht den Durchmesser der letztern.



Die Anzahl der Zähne der Scheibe α sei $\beta = 60$, an dieselbe sei die Scheibe γ gefügt, welche $\delta = 40$ Zähne hat; man soll den Durchmesser der Schreibe γ finden. Da die Anzahl der Zähne von α gleich β, die von γ gleich δ ist, und die Anzahl der Zähne

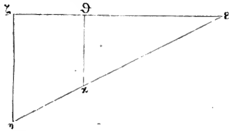
ἀριθμὸν δοθείς, δοθεὶς γάρ ἐστιν ὁ τῶν ξ̄ πρὸς τὰ μ̄, λόγος ἄρα καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ α πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ γ ὁ τῶν ξ̄ πρὸς τὰ μ̄· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ διάμετρος τοῦ α, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ διάμετρος τοῦ γ. δεῖ γὰρ ποιεῖν ὡς τὸν ξ̄ ἀριθμὸν πρὸς τὸν μ̄ οὕτω τὴν διάμετρον τοῦ α πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ ὁ περὶ διάμετρον ἐκείνην γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔστω τῷ ζητουμένῳ τυμπάνῳ. Ὀργανικῶς δὲ οὕτως· ἐκκείσθω τὶς εὐθεῖα ἡ εζ τετμημένη εἰς ἴσα τὸ πλῆθος τοῖς ὀδοῦσι τοῦ α τυμπάνου, τουτέστι ξ̄, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀχθείσης τῆς [1]) ζη κείσθω διαμέτρῳ τοῦ α τυμπάνου ἴση ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη, καὶ οἵων ἡ εζ ξ̄, τοιούτων μ̄ ἡ εθ ἀπειλήφθω τοῦ πλήθους τῶν ὀδόντων τοῦ γ γινομένη, καὶ διὰ τοῦ θ παράλληλος τῇ ζη ἤχθω ἡ θκ· καὶ ἔσται ἄρα ἡ θκ ἴση τῇ διαμέτρῳ τοῦ γ τυμπάνου· φανερὰ γὰρ ἡ ἀπόδειξις.

Πῶς δὲ κατασκευάζεται κοχλίας τὴν ἕλικα ἁρμοστὴν ἔχων τοῖς λοξοῖς ὀδοῦσι τοῦ δοθέντος τυμπάνου, φανερὸν οὕτως ἔσται. νοείσθω κύλινδρος ἰσοπαχῶς τετορνευμένος ὁ αδεζ, πλευρὰ δ' αὐτοῦ ἡ αε, καὶ εἰλήφθω μονοστρόφου ἕλικος ἐπ' αὐτῆς διάστημα τὸ αβ, καὶ λεπίδιον χαλκοῦν γεγενήσθω οὗ τὸ μὲν ηθκ μέρος τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔστω ὀρθὴν ἔχον τὴν θ γωνίαν, τὸ δὲ λοιπὸν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ θκλ· ἴση δὲ κείσθω ἡ θη τῇ αβ, ἡ δὲ θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αδεζ κυλίνδρου, καὶ περικαμπτέσθω τόδε λεπίδιον περὶ τὸν κύλινδρον, ἵνα καὶ τὸ θκλμ παραλληλόγραμμον κύλινδρος γένηται ἁπτόμενος τοῦδε ὅτον ἐναχθῇ, καὶ κείσθω τὸ μὲν θ ἐπὶ τὸ α, τὸ δὲ η ἐπὶ τὸ β, καὶ οὕτω γράψομεν διὰ τῆς ηκ ὑποτεινούσης,

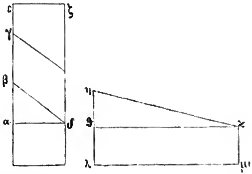
[1]) Die Hdsch. hat τῇ.

von γ den Umfang von γ ausmacht), so verhält sich die Zahl β zur Zahl δ wie der Umfang von α zum Umfang von γ; aber die Umfänge verhalten sich wie die Durchmesser, und da das Verhältniss der Zahl β zur Zahl δ gegeben ist (denn es ist 60 : 40 gegeben), so ist auch das Verhältniss des Durchmessers von α zum Durchmesser von γ = 60 : 40; nun ist der Durchmesser von α gegeben, mithin auch der Durchmesser von γ. Setzt man nämlich, dass 60 : 40 wie der Durchmesser von α zu irgend einem andern Durchmesser sich verhält, so wird der über diesem letztern beschriebene Kreis der gesuchten Scheibe gleich sein.

Organisch wird die Aufgabe auf folgende Weise gelöst. Es sei die Gerade $\varepsilon\zeta$ in gleiche Theile getheilt, deren Anzahl den Zähnen der Scheibe α gleich ist, also = 60; man errichte auf derselben die Senkrechte $\zeta\eta$, mache sie gleich dem Durchmesser der Scheibe α und ziehe $\varepsilon\eta$. Von den 60 Theilen, die auf die $\varepsilon\zeta$ gehen, nehme man 40 (die Anzahl der Zähne von γ) = $\varepsilon\vartheta$, und ziehe durch ϑ zu $\zeta\eta$ die Parallele $\vartheta\varkappa$, so wird $\vartheta\varkappa$ dem Durchmesser der Scheibe γ gleich sein. Der Beweis ist leicht.



Wie eine Schraube mit einem [*Commund. XXIV.*] Schraubengang, der in die schrägen Zähne einer gegebenen Scheibe



καμφθείσης δὲ, τὴν καλουμένην μονόστροφον ἕλικα ὡς τὴν βϑ. καὶ πάλιν μεταθέντες τὸ λεπίδιον, ὥστε τὸ μὲν ϑ κατὰ τὸ β εἶναι, τὸ δὲ η κατὰ τὸ γ, γράψομεν διὰ τῆς ηκ ἑτέραν ἕλικα μονόστροφον, ὥστε τὴν ὅλην εἶναι δίστροφον· ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ τὸ α ἐπὶ τὸ β παραγίνεται ὁμαλῶς κινούμενον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ αβ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου κινηθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθίσταται, καὶ τὸ εἰρημένον φέρεσθαι σημεῖον κατὰ τῆς αβ εὐθείας γράψει τὴν μονόστροφον ἕλικα· τοῦτο γὰρ Ἀπολλώνιος ὁ Περγεὺς ἀπέδειξεν. ἐὰν οὖν καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βγ καὶ τὰς ἑξῆς ἄχρι τοῦ ε διχὰ τέμνωμεν καὶ διὰ τῶν σημείων τῷ λεπιδίῳ γράψωμεν μονοστρόφους ἕλικας, ἀπ' αὐτῶν τε τὸ βάθος τῆς ἕλικος ὃ βουλόμεθα λάβωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ βάθους λοιπὸν καὶ τῆς γραφείσης ἕλικος, ῥαδίως τὴν ἕλικα φακοειδῆ ῥινήσαντες ἕξομεν ἀπηρτισμένην.

Πάλιν νοείσθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ δοθέντος τυμπάνου περὶ τὸν κρόταφον κύκλος οὗ περιφέρεια ἡ ρυτκ, κέντρον δὲ τὸ ξ, καὶ τὰ ρ, υ, τ ἴσον ἀπ' ἀλλήλων ἀπέχοντα λόγου χάριν τοῦ πάντος κύκλου εἰς εἴκοσι τέσσαρα διῃρημένου, καὶ ἀπὸ τῶν ρ, υ, τ ἐπὶ τὸ ξ κέντρον νεύουσαι διήχθωσαν ἄχρι τοῦ περὶ τὸ ξ κέντρον γεγραμμένου κύκλου τοῦ μνπφ αἱ ρο, υο, το, καὶ ἀπὸ τῶν διχοτομούντων τὰς οο περιφερείας σημείων διήχθωσαν ἐπὶ τὰ ρ, υ, τ σημεῖα αἱ νρ, μρ, νυ, πυ, πτ, τφ, καὶ τῆς ορ εὐθείας προσήχθω ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ τυμπάνου ἐπιφανείᾳ ἡ ρσ μέχρι τῆς περιφερείας οὖσα τοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ τυμπάνου περὶ τὸν κρό-

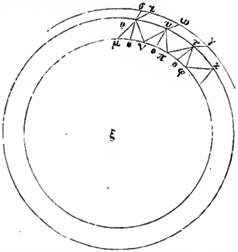
hineinpasst, construirt wird, ergiebt sich auf folgende Weise. Man denke sich einen gleichdicken runden Cylinder $\alpha\delta\varepsilon\zeta$, dessen Seite $= \alpha\varepsilon$, auf derselben soll die Entfernung der Windung eines Schraubenganges $= \alpha\beta$ sein. Man forme ferner einen metallnen Steifen, von dem der eine Theil das bei ϑ rechtwinklige Dreieck $\eta\vartheta\varkappa$ bildet, das übrige das rechtwinklige Parallelogramm $\vartheta\varkappa\lambda$, und es sei $\vartheta\eta = \alpha\beta$, $\vartheta\varkappa$ gleich dem Umfang des Cylinders $\alpha\delta\varepsilon\zeta$. Es werde nun dieser Streifen um den Cylinder herumgebogen, so dass auch das Parallelogramm $\vartheta\varkappa\lambda\mu$ ein Cylinder wird der sich an jenen wenn er hineingepasst wird anschliesst, und es falle ϑ auf α, η auf β, so werden wir durch die herumgebogene Hypotenuse $\eta\varkappa$ eine sogenannte einmalige Windung eines Schraubengangs wie $\beta\delta$ beschreiben. Legen wir ferner den Streifen so an, dass der Punkt ϑ in β, η in γ fällt, so werden wir durch $\eta\varkappa$ eine zweite einmalige Windung eines Schraubengangs beschreiben, demnach zusammen einen Schraubengang mit zwei Windungen haben; in welcher Zeit nämlich der Punkt α in β ankommt, wenn er sich gleichmässig bewegt, in derselben Zeit wird auch die Linie $\alpha\beta$, wenn sie auf der Oberfläche des Cylinders sich bewegt, in denselben Ort eintreffen, und der Punkt, von welchem gesagt wird, dass er auf der Linie $\alpha\beta$ hinabgleitet, wird die einmalige Windung des Schraubengangs beschreiben; dies hat Apollonius von Pergä bewiesen. Wenn wir nun eine jede der Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und der folgenden bis zum Punkte ε halbiren und durch die Punkte mittelst des Streifens einmalige Windungen des Schraubengangs beschreiben, und von ihnen aus die Tiefe des Schraubengangs, welche wir wollen, nehmen und von der Tiefe aus auch das übrige des beschriebenen Schraubengangs, so werden wir, nachdem wir den Schraubengang linsenförmig polirt haben, die Schraube ohne Schwierigkeit vollendet herstellen.

Ferner denke man sich auf der einen Seitenfläche einer gegebenen Scheibe in der Nähe des Randes einen Kreis, dessen Umfang $\varrho\upsilon\tau\varkappa$ und dessen Mittelpunkt ξ, die Punkte ϱ, υ, τ seien in gleichem Abstand von einander, indem z. B. der ganze Kreis in 24 Theile getheilt ist; von diesen Punkten ϱ, υ, τ ziehe man die Linien ϱo, υo, τo nach dem Mittelpunkt ξ zu bis zu dem um den Mittelpunkt ξ beschriebenen Kreis $\mu\nu\pi\varphi$, und von den die Bogen oo halbirenden Punkten die Linien $\nu\varrho$, $\mu\varrho$, $\nu\upsilon$, $\pi\upsilon$, $\pi\tau$, $\tau\varphi$ nach den Punkten ϱ, υ, τ; in gerader Richtung mit $o\varrho$ sie auf dem gekrümmten Rande der Scheibe die $\varrho\sigma$ bis zu der Peripherie gezo-

ταφον ὁμοίως γραφομένου τοῦ χω κύκλου. καὶ ἀπὸ τοῦ σ τῇ μὲν ἥμισυ τῆς ρυ περιφερείας ὡς λοξώσεως ἴση κείσθω ἡ σχ, τῇ δὲ ρυ ἡ χω, καὶ οὕτως ἑξῆς ἴσην θέντες τῇ υι τὴν ωγ καὶ τὰς λοιπὰς, καὶ ἐπιζεύξαντες τὰς ρχ, τω, τγ ἕξομεν τὰς τῶν ὀδόντων λοξώσεις. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ρυ κύκλος τῷ κύκλῳ, γράψομεν κἂν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ τυμπάνου περὶ κέντρον τὸ ἀντικείμενον τῷ ξ σημείῳ κύκλον ἴσον τῷ μυ, καὶ ἀπὸ τῶν χ, ω ἀγαγόντες ἐπ' αὐτὸν εὐθείας νευούσας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ, καὶ τὰ αὐτὰ ποιήσαντες τοῖς ἐπὶ τῆς ρυι περιφερείας τοῦ κύκλου ἕξομεν καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τυμπάνου καταγεγραμμένην. καὶ λοιπὸν ἐκκόψαντες τὰ μεταξὺ τῶν γραμμῶν σχήματα ὡς τὰ νρυ, υπτ καὶ τὰ ἀντικείμενα ἕξομεν τὸ τύμπανον ὠδοντωμένον ὀδοῦσι λοξοῖς. ἐμβαίνει δὲ ἕκαστος εἰς τὴν τοῦ κοχλίου ἕλικα, ἐπεὶ καὶ τὸ μεταξὺ διάστημα τὸ ρυ ἴσον ἐστὶ τῷ αβ διαστήματι τῆς τοῦ κοχλίου ἕλικος. καὶ δῆλον ὡς καθ' ἑκάστην στροφὴν τοῦ κοχλίου εἷς ὀδοὺς παρενεχθήσεται· τοῦ γὰρ Ἥρων ἀπέδειξεν ἐν τοῖς μηχανικοῖς, γραφήσεται δὲ καὶ ὑφ' ἡμῶν ἵνα μηδὲν ἔξωθεν ἐπιζητῶμεν.

Νονείσθω γὰρ κοχλίας ὁ αβ, ἡ δὲ ἐν αὐτῷ ἕλιξ ἡ

gen, die zu dem auf der andern Seitenfläche der Scheibe in der Nähe des Randes ähnlich beschriebenen Kreises $\chi\omega$ gehört, und



von dem Punkte σ aus sei $\sigma\chi$ der Hälfte des Bogens $\varrho\upsilon$ als der Schiefe (der Zähne) gleich, ferner $\chi\omega = \varrho\upsilon$, und so weiter $\omega\gamma = \upsilon\tau$; ziehen wir nun $\varrho\chi$, $\upsilon\omega$, $\tau\gamma$, so erhalten wir die Schiefen der Zähne. Da der Kreis $\varrho\upsilon$ dem Kreise $\chi\omega$ gleich ist, so werden wir auch auf der andern Seitenfläche der Scheibe um einen dem Punkte ξ gegenüberliegenden Mittelpunkt einen dem $\mu\nu$ gleichen Kreis beschreiben und an denselben von den Punkten χ, ω nach seinem Mittelpunkt zu Linien ziehen, und werden so, indem wir ebenso wie mit den Punkten auf der Peripherie des Kreises $\varrho\upsilon\tau$ verfahren, auch die andere Seite der Scheibe beschrieben erhalten. Meisseln wir nun zuletzt die Figuren heraus, welche zwischen den Linien liegen, wie $\nu\varrho\upsilon$, $\upsilon\pi\tau$, und die gegenüberliegenden, so werden wir eine gezahnte Scheibe mit schrägen Zähnen haben, von denen ein jeder in den Schraubengang der Schraube passt, da der Zwischenraum $\varrho\upsilon$ dem Zwischenraum $\alpha\beta$ des Schraubengangs der Schraube gleich ist. Offenbar wird bei jeder Umdrehung der Schraube ein Zahn weiter geschoben werden, was Hero in der Meckanik bewiesen hat und auch wir darthun wollen, um den Gegenstand vollständig zu erledigen.

Hat man die Schraube $\alpha\beta$ und auf ihr den Schraubengang

αγδεζβ, νοείσθωσαν δὲ μονόστροφοι αἱ εἰρημέναι ἕλικες, τύμπανον δὲ ἔστω τὸ παρακείμενον καὶ ὠδοντωμένον τὸ ηγεθ ὀδόντας ἔχον τοὺς ηγ. γε, εθ ἁρμόζοντας τῇ ἕλικι· οἱ ἄρα λοιποὶ οὐκ ἐναρμόζουσιν ἐς τὰς λοιπὰς ἕλικας. ἐὰν οὖν ἐπιστρέψωμεν τὸν κοχλίαν, ὥστε τὸ ε σημεῖον παρωθεῖσθαι ἐπὶ τὰ γ μέρη, παρέσται τὸ ε ἐπὶ τὸ γ ὅταν ὁ κοχλίας ἀποκατάστασιν μίαν ποιήσεται, καὶ ἕξει ὁ μὲν γε ὀδοὺς τὴν τοῦ γη [ὁ δὲ εθ τὴν τοῦ γε], καὶ πάλιν ὁ εθ θέσιν ἐσχηκὼς τὴν γε ἐν μιᾷ τοῦ κοχλίου περιστροφῇ ὅλος παραχθήσεται. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὀδόντων τὰ αὐτὰ ἐπινοεῖν χρή, ὥστε ὅσους ἐὰν ὀδόντας ἔχῃ τὸ τύμπανον, τοσαυτάκις ὁ κοχλίας κινηθεὶς μίαν ἀποκατάστασιν τοῦ τυμπάνου ποιήσεται.

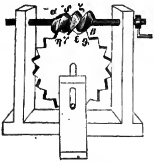
Τοσαῦτα [1]) μὲν οὖν περὶ τοῦ βαρουλκοῦ [2]), τῶν δὲ προειρημένων πέντε δυνάμεων ἐκ τοῦ Ἥρωνος τὴν ἔκθεσιν ἐπιτομώτερον ποιησόμεθα πρὸς ὑπόμνησιν τῶν φιλομαθούντων, προσθέντες ἔτι καὶ περὶ τῆς μονοκώλου καὶ δικώλου [καὶ τρικώλου] καὶ τετρακώλου μηχανῆς ἀναγκαίως λεγομένων, μή ποτε καὶ τῶν βιβλίων ἐν οἷς ταῦτα γέγραπται ἀπορία γένηται τῷ ζητοῦντι, καὶ γὰρ ἡμεῖς κατὰ πολλὰ μέρη διεφθαρμένοις ἐνετύχομεν ἀνάρχοις τε καὶ ἀτελεύτοις βιβλίοις. πέντε τοίνυν οὐσῶν δυνάμεων δι' ὧν τὸ δοθὲν βάρος τῇ δοθείσῃ βίᾳ κινῆται, ἀναγκαῖόν ἐστι τάτε σχήματα αὐτῶν καὶ τὰς χρείας, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀνόματα ἐκθέσθαι. ἀποδέδοται δε ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος, καὶ διότι αἱ προειρημέναι δυνάμεις εἰς μίαν ἄγονται φύσιν, καίτοι παραπολὺ διαλλάσσουσαι τοῖς

---

[1]) Das Folgende ist sicherlich nicht von Pappus verfasst; es ist ein späterer Zusatz.

[2]) Die Hdsch hat περὶ τοῦ βάρους ἄκουε.

$\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\beta$, und denkt man sich ihn aus einmaligen Windungen bestehend, daran sei eine gezahnte Scheibe $\eta\gamma\varepsilon\vartheta$ gefügt mit den in den Schraubengang passenden Zähnen $\eta\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\vartheta$; die übrigen Zähne passen nicht in die andern Schraubengänge. Wenn wir nun die Schraube drehen so dass der Punkt ε nach der Seite γ zu fortgestossen wird, so wird der Punkt ε nach γ kommen, wenn die Schraube eine vollständige Umdrehung gemacht hat, und der Zahn $\gamma\varepsilon$ wird die Lage von $\gamma\eta$, der Zahn $\varepsilon\vartheta$ die Lage von $\gamma\varepsilon$ haben, und ferner wird der Zahn $\varepsilon\vartheta$ aus seiner Lage $\gamma\varepsilon$ durch eine Umdrehung der Schraube vollständig weiter geführt werden. Ebendasselbe muss man sich in Betreff der folgenden Zähne vorstellen, alsdann wird, wenn die Schraube so vielmal gedreht wird als die Scheibe Zähne hat, die erstere eine vollständige Umdrehung der Scheibe bewirken.



σχήμασιν. ὀνόματα μὲν οὖν ἐστι τάδε· ἄξων ἐν περιτροχίῳ, μοχλὸς, πολύσπαστον, σφὴν, καὶ πρὸς τούτοις ὁ καλούμενος ἄπειρος κοχλίας. ὁ μὲν οὖν ἄξων ὁ ἐν τῷ περιτροχίῳ κατασκευάζεται οὕτω· ξύλον δεῖ λαβεῖν εὔτονον τετράγωνον καθάπερ καὶ δοκίδα καὶ τούτου τὰ ἄκρα εἰλύσαντα στρογγύλα ποιῆσαι καὶ χοινικίδας περιθεῖναι χαλκᾶς συναρμοσμένας τῷ ἄξονι .... [1]), ὥστε ἅμα στρέφεσθαι τόν τε ἄξονα καὶ τὸ περιτρόχιον. ἡ μὲν οὖν κατασκευὴ δεδήλωται, χρεία δ' ἐστὶν ἡ μέλλουσα λέγεσθαι. ὅταν γὰρ βουλόμεθα μεγάλα βάρη κινεῖν ἐλάσσονι βίᾳ, τὰ ἐκδεδεμένα ἐκ τοῦ βάρους ὅπλα περιθέντες περὶ τὰ σεσιμωμένα τοῦ ἄξονος καὶ ἐμβαλόντες σκυτάλας εἰς τὰ ἐν τῷ περιτροχίῳ τρήματα, ἐπιστρέφομεν τὸ περιτρόχιον, κατάγοντες τὰς σκυτάλας, καὶ οὕτως εὐκόπως κινηθήσεται τὸ βάρος ὑπὸ ἐλάσσονος δυνάμεως, τῶν ὅπλων περὶ τὸν ἄξονα ἐπειλουμένων ἢ καὶ μὴ διαμηρυομένων ὑπό τινος, πρὸς τὸ μὴ ἅπαν τὸ ὅπλον περικεῖσθαι τῷ ἄξονι. τοῦ δὲ εἰρημένου ὀργάνου τὸ μὲν μέγεθος ἁρμόζεσθαι δεῖ πρὸς τὰ μέλλοντα κινεῖσθαι βάρη, τὴν δὲ συμμετρίαν πρὸς τὸν λόγον ὃν ἔχει τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὴν κινοῦσαν δύναμιν, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. ἣν δὲ δευτέρα δύναμις ἡ διὰ τοῦ μοχλοῦ, κατὰ ..... [2]) προεπίνοια τῆς περὶ τὰ ὑπεράγοντα βάρη κινήσεως. προελόμενοι γάρ τινες μεγάλα βάρη κινεῖν, ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς γῆς ἔδει πρῶτον μετεωρίσαι, λάβας δὲ οὐκ εἶχον διὰ τὸ πάντα τὰ μέρη τῆς ἕδρας τοῦ φορτίου ἐπικεῖσθαι τῷ ἐδάφει, ὑπορύξαντες βραχὺ καὶ ξύλον μακροῦ τὸ ἄκρον ὑπολαβόντες ὑπὸ τὸ φορτίον κατῆγον ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου, ὑποθέντες τῷ ξύλῳ παρ' αὐτῷ τῷ φορτίῳ λίθον, ὃ δὴ καλεῖται ὑπομόχλιον· φανείσης δ' αὐτοῖς τῆς κινήσεως πάνυ εὐκόπου, ἐνόησαν ὅτι δυνατὸν κινεῖσθαι μεγάλα βάρη διὰ τοῦ τρόπου τούτου. καλεῖται δὲ τὸ ξύλον μοχλὸς εἰ τετράγωνον εἴη, εἴτε στρογγύλον. ὅσῳ δ' ἂν ἐγγυτέρω τίθεται τοῦ φορτίου τὸ ὑπο-

[1]) Die Hdsch. hat hier eine grosse Lücke. *Commandin* übersetzt: ita ut injectae in foramina rotunda in immoto quodam pegmate expedite vertantur, cum foramina habeant τριβεῖς aereos choinicidibus subjectos. Vocatur autem id lignum, quod dictum est, axis et circa medium axem circumponitur tympanum, habens foramen quadratum axi congruens, ut eodem tempore et axis et peritrochium vertatur.

[2]) Lücke der Hdsch., vielleicht ist zu lesen: *κατὰ ὃν ἡ.*

μόχλιον, τοσούτῳ εὐχερέστερον κινεῖται τὸ βάρος, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. ἔστι δὲ ἡ τρίτη δύναμις ἡ κατὰ τὸ πολύσπαστον. ὅταν γὰρ βουλόμεθά τι βάρος ἕλκειν, ἐξάψαντες ὅπλον ἐξ αὐτοῦ ἐπισπώμεθα τοσαύτῃ βίᾳ, ὅση τῷ φορτίῳ ἰσόῤῥοπός ἐστιν. ἐὰν δὲ ἑλκύσαντες ἐκ τοῦ φορτίου τὸ ὅπλον τὴν μὲν μίαν αὐτοῦ ἀρχὴν ἐκδήσωμεν ἔκ τινος μένοντος χωρίου, τὴν δὲ ἑτέραν βάλλωμεν διὰ τροχίλου ἐκδεδεμένου ἐκ τοῦ φορτίου καὶ ταύτην ἐπισπώμεθα, εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. πάλιν δὲ ἐὰν ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάψωμεν ἕτερον τρόχιλον καὶ τὴν ἀγομένην ἀρχὴν διὰ τούτου διαλαβόντες ἐπισπώμεθα, πολλῷ μᾶλλον εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. .... [1]) ἀεὶ τροχίλους ἔκ τε τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάπτοντες καὶ ἐκ τοῦ φορτίου καὶ διαβάλλοντες ἐναλλὰξ τὴν ἀγομένην ἀρχὴν εἰς τοὺς τροχίλους εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. ὅσῳ δ' ἂν εἰς πλείονα κῶλα τὸ ὅπλον κάμπτηται, τὸ βάρος εὐκοπώτερον κινηθήσεται. δεῖ δὲ τὴν ἐκδεδεμένην ἀρχὴν ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάπτεσθαι. ἵνα οὖν μὴ καθ' ἕνα τῶν τροχίλων ἔκ τε τοῦ μένοντος χωρίου καὶ ἐκ τοῦ φορτίου ἐξάπτωμεν, οἱ μὲν εἰρημένοι εἰς τὸ μένον εἶναι χωρίον εἰς ἓν ξύλον ἐντίθενται περὶ ἄξονα κινούμενοι, ὃ καλεῖται μάγγανον. τοῦτο δὲ ἐξάπτεται ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου διά τινος ἑτέρου ὅπλου, οἱ δὲ πρὸς τῷ φορτίῳ εἰς ἕτερον μάγγανον τούτῳ ἴσον, ὃ δὴ πάλιν ἐξάπτεται ἐκ τοῦ φορτίου μόνον. οὕτω δὲ δεῖ καὶ τετάχθαι ἐκ τοῖς μαγγάνοις τοὺς τροχίλους, ὥστε τὰ κῶλα μὴ ἐμπλεκόμενα πρὸς ἄλληλα δυσπειθῆ γίνεσθαι. δι' ἣν δὲ αἰτίαν πλειόνων τῶν κώλων γινομένων εὐκοπεία παρακολουθεῖ δείξομεν, καὶ δι ἣν αἰτίαν ἡ ἑτέρα ἀρχὴ ἐκ τοῦ μένοντος ἐξάπτεται χωρίου. ἡ δὲ ἑξῆς δύναμις ἡ διὰ τοῦ σφηνὸς, καὶ αὕτη μεγάλας χρείας παρεχομένη πρός τε τὰς μυρεψικὰς πιέσεις καὶ τὰς διὰ τῆς τεκτονικῆς ὑπεραγούσας κολλήσεις. τὸ δὲ πάντων μέγιστον, ὅταν τοὺς ἐκ τῶν λατομιῶν λίθους ἀποσπᾶν δέῃ τῆς κατὰ τὸ κάτω μέρος συνεχείας, οὐδεμία τῶν ἄλλων δυνάμεων ἐνεργεῖν δύναται, οὐδ' ἂν ἅμα πᾶσαι συζευχθῶσι. μόνος δὲ ὁ σφὴν ἐνεργεῖ διὰ τῆς τυχούσης, καὶ ἄνεσις μὲν οὐ δή τις οὖν

[1]) Grossere Lucke der Hdsch. *Command.* ubersetzt: et rursus si ad pondus religaverimus alterum orbiculum et ductum caput per ipsum sumentes attrahamus, adhuc multo facilius pondus movebitur, semperque etc.

γίνεται κατὰ τὰ διαλείμματα τῶν ἐργαζομένων, καρτερὰ δὲ ἐπίτασις. τοῦτο δὲ φανερὸν ἐκ τοῦ καὶ μὴ πλησσομένου τοῦ σφηνὸς ἐνίοτε ψήφους καὶ ῥήγματα γενέσθαι διὰ τῆς τοῦ σφηνὸς ἐνεργείας. ὅσῳ δ' ἂν ἡ τοῦ σφηνὸς γωνία ἐλάσσων γίνεται, τοσούτῳ εὐχερέστερον ἐνεργεῖ, τουτέστι δι' ἐλάσσονος πληγῆς, ὡς δείξομεν. τὰ μὲν οὖν προειρημένα ὄργανα φανερὰς καὶ αὐτοτελεῖς ἔχει τὰς κατασκευὰς πολλαχοῦ ἐν ταῖς χρείαις φαινομένας, ὁ δὲ κοχλίας ἔχει τι περίεργον περί τε τὴν κατασκευὴν καὶ τὴν χρῆσιν. ὅτε μὲν οὖν γὰρ αὐτὸς καθ' αὑτὸν μόνος ἐνεργεῖ, ὅτε δὲ καὶ προςλαμβάνων ἔτι δύναμιν, πλὴν ὅτι οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν ἢ σφὴν εἰλημμένος ἀπολειπόμενος τῆς πληγῆς, διὰ μοχλοῦ δὲ καὶ τὴν κίνησιν ποιούμενος. τοῦτο δὲ ἔσται δῆλον ἐκ τῶν μελλόντων λέγεσθαι. φύσις μὲν οὖν ὑπάρχει τῆς περὶ αὐτὸν πραγματείας τοιαύτη· ἐὰν κυλίνδρου πλευρὰ γένηται κατὰ τῆς κυλίνδρου ἐπιφανείας, πρὸς δὲ τῷ πέρατι ταύτης σημεῖόν τι ἅμα κατὰ αὐτῆς τῆς πλευρᾶς φέρηται, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ἥ τε πλευρὰ ἡ μίαν ἀποκατάστασιν ποιήσεται, καὶ τὸ σημεῖον τὸ πᾶν τῆς πλευρᾶς διεξελθῇ, ἡ γενομένη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐν τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ γραμμὴ ἕλιξ ἐστίν, ἣν δὴ κοχλίαν καλοῦσι. καταγράφεται δὲ ἐν τῷ κυλίνδρῳ οὕτως· ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθείας ἐκθώμεθα ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν ἡ μὲν μία ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ εἰρημένου κυλίνδρου πλευρᾷ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κυλίνδρου περιφερείᾳ, ὅ ἐστι ...... [1]) βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν εἰρημένων εὐθειῶν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τεθῇ δὲ ἡ ἴση τῇ τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ ...... [2]), ἡ δὲ ἑτέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἐπειληθῇ κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, εἰληθήσεται καὶ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν κατὰ τῆς κυλινδρηθείσης ἐπιφανείας, καθ' ἧς ἔσται ἡ εἰρημένη ἕλιξ. ἔξεστι δὲ διελόντα τὴν τοῦ κυλίνδρου πλευρὰν εἰς ἴσα, ὅσα δ' ἄν τις προαιρῆται, καθ' ἕκαστον αὐτῆς μέρος περιγράφειν ἕλικα ὡς προείρηται, ὥστε ἐν τῷ κυλίνδρῳ πλείονας ἕλικας γράφεσθαι. καλείσθω δὲ ἡ ἅπαξ εἰληθεῖσα ἕλιξ μονόστροφος, τουτέστιν ἡ περὶ τὰ ἑκάστου μέρους γινομένη γραμμή. κατὰ αὐτῆς οὖν τῆς γραμμῆς σωλῆνα ἐντεμόντες εἰς τὸ βάθος τοῦ κυλίνδρου καὶ

[1]) Die Hdsch. hat hier βάρος.

[2]) Lücke der Hdsch. *Command.* übersetzt: ponatur autem ea, quae est aequalis lateri cylindri, in ipso cylindri latere, et altera etc.

ἐκκόψαντες, ὥστε ἐν τῷ σωλῆνι τύλον ἐναρμόσαντες στερεὸν χρῶνται τῷ κοχλίᾳ οὕτως· τὰ ἄκρα αὐτοῦ στρογγύλα ποιήσαντες ἐναρμόζουσιν εἴς τινα διαπήγματα ἐν στρογγύλοις τρήμασιν ὥστε εὐκόπως αὐτὸν στρέφεσθαι, ὑπὲρ δὲ τὸν κοχλίαν κανόνα διατεθέντες παράλληλον αὐτῷ σωλῆνα ἔχοντα μέσον ἐν τῇ ἄνω ἐπιφανείᾳ ἐναρμόζουσιν εἰς τοῦτον τὸν σωλῆνα τὸν εἰρημένον τύλον, ὥστε τὸ μὲν ἕτερον ἄκρον τοῦ τύλου ἐν ...... [1]) τῷ κοχλίου σωλῆνι, τὸ δὲ ἕτερον ἐν τῷ εἰρημένῳ σωλῆνι τῷ ἐν τῷ κανόνι. ὅταν οὖν βούλωνται φορτίον κινεῖν διὰ τούτου τοῦ ὀργάνου, ὅπλον λαβόντες, τούτου τὴν μὲν μίαν ἀρχὴν ἐξάπτουσιν ἐκ τοῦ φορτίου, τὴν δὲ ἑτέραν ἐκ τοῦ προειρημένου τύλου, καὶ τρημάτων ὄντων τῇ κεφαλῇ τοῦ κοχλίου σκυτάλας ἐμβαλόντες κατάγουσιν, καὶ οὕτως ὑπὸ τῆς ἕλικος ὁ τύλος παραγόμενος ἐν τῷ σωλῆνι ἐπισπάσει τὸ ὅπλον, δι' οὗ καὶ τὸ φορτίον. ἔξεστι δὲ ἀντὶ τῶν σκυτάλων χειρολαβήν τινα περιθεῖναι τῷ ἄκρῳ τοῦ κοχλίου ὑπερέχοντι εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ διαπήγματος καὶ οὕτω στρέφοντα τὸν κοχλίαν ἐπισπᾶσαι τὸ φορτίον. ἡ δ' ἐν τῷ κοχλίᾳ ἕλιξ, ὅτε μὲν τετράγωνος γίνεται, ὅτε δὲ φακοειδής, τετράγωνος μὲν ὅταν ὁ ἐν αὐτῷ σωλὴν ὀρθὰς ἔχει τὰς ἐντομάς, φακοειδὴς δὲ ὅταν λοξὰς καὶ εἰς μίαν συναγομένας γραμμήν. καλεῖται δὲ ὁ μὲν τετράγωνος, ὁ δὲ φακωτός. ὅταν μὲν οὖν αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν ὁ κοχλίας ἐνεργῇ, ταύτην λαμβάνει τὴν κατασκευήν. γίνεται δὲ καὶ ἑτέρως· προσλαβόντες αὐτοῦ τινα ἑτέραν δύναμιν τὴν διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ περιτροχίῳ καλουμένου κατασκευήν, νοήσομεν τὸ περὶ τὸν ἄξονα τύμπανον ὠδοντωμένον εἶναι, κοχλίαν δέ τινα παρακεῖσθαι τῷ τυμπάνῳ ἤτοι ὀρθὸν κείμενον πρὸς τὸ ἔδαφος ἢ παράλληλον τῷ ἐδάφει, ἔχοντα τὴν μὲν ἕλικα ἐμπεπλεγμένην τοῖς ὀδοῦσι τοῦ τυμπάνου, τὰ δὲ ἄκρα ἐν στρογγύλοις τρήμασι πολευόμενα ἔν τισι διαπήγμασι καθάπερ καὶ προείρηται, καὶ ὑπεροχῆς οὔσης τοῦ ἄκρου τοῦ κοχλίου εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ διαπήγματος μέρος ἤτοι χειρολαβήν τινα περιθεῖσθαι, δι' ἧς ἐπιστραφήσεται ὁ κοχλίας, ἢ τρήματα, ὥστε σκυτάλων ἐμβληθεισῶν ὁμοίως ἐπιστρέφεσθαι αὐτόν. πάλιν οὖν τὰ ἐκ τοῦ φορτίου ὅπλα περιλαβόντες περὶ τὸν ἄξονα ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τυμπάνου

[1]) Ein Wort fehlt. *Commandin* übersetzt: ita ut — aptetur.

καὶ ἐπιστρέφοντες τὸν κοχλίαν. δι᾽ οὗ καὶ τὸ ὠδοντωμένον τύμπανον, ἐπισπασόμεθα τὸ βάρος. αἱ μὲν οὖν κατασκευαὶ καὶ αἱ χρήσεις τῶν προειρημένων πέντε δυνάμεων δεδήλωνται. τίς δέ ἐστιν ἡ αἰτία, δι᾽ ἣν δι᾽ ἑκάστης αὐτῶν μεγάλα βάρη κινεῖται μικρᾷ παντάπασι δυνάμει, Ἥρων ἀπέδειξεν ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς ἐκ τοῦ γ τοῦ Ἥρωνος μηχανὰς γράφομεν πρὸς εὐκοπίαν καὶ λυσιτέλειαν ἁρμοζούσας, δι᾽ ὧν πάλιν μεγάλα βάρη κινήσεται. τὰ μὲν οὖν ἀγόμενα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους φησὶν ἐπὶ χελώνας ἄγεται. ἡ δὲ χελώνη πῆγμά ἐστι ...... [1]) συμπεπηγὸς, ὧν τὰ ἄκρα ἀνασεσίμωται. ταύταις οὖν ἐπιτίθεται τὰ βάρη, καὶ ἐκ τῶν ἀκρῶν αὐτῶν ἤτοι πολύσπαστα ἐκδύνεται ἢ ὅπλων ἀρχαί. ταῦτα δὲ ἤτοι ἀπὸ χειρὸς ἕλκεται ἢ εἰς ἐργάτας ἀποδέδοται, ὧν περιαγομένων ἡ χελώνη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σύρεται ὑποβαλλομένων σκυτάλων ἢ σανίδων. ἐὰν μὲν γὰρ μικρὸν ᾖ τὸ φορτίον, σκυτάλαις χρῆσθαι δεῖ, ἐὰν δὲ μεῖζον, ταῖς σανίσι, διὰ τὸ ταύτας μὴ εὐκόλως σύρεσθαι· αἱ γὰρ σκυτάλαι κυλιόμεναι κίνδυνον ἔχουσιν τοῦ φορτίου ὁρμὴν λαβόντος. ἔνιοι οὔτε σκυτάλαις οὔτε σανίσι χρῶνται, ἀλλὰ τροχοὺς ναστοὺς προςθέντες ταῖς χελώναις ἄγουσιν. ἐπὶ δὲ τῶν εἰς ὕψος βασταζομένων φορτίων φησὶν μηχαναὶ γίνονται αἱ μὲν μονόκωλοι, αἱ δὲ δίκωλοι, αἱ δὲ τρίκωλοι, αἱ δὲ τετράκωλοι. αἱ μὲν οὖν μονόκωλοι οὕτω· ξύλον εὔτονον λαμβάνεται ὕψος ἔχον μεῖζον ἢ οὗ βουλόμεθα τὸ φορτίον μετεωρίσαι, κἂν μὲν αὐτὸ ἰσχυρὸν ᾖ, ὅπλον βαλόντες περὶ αὐτὸ καὶ σφίγγοντες καὶ διαμηρυόμενοι κατὰ ἐπείλησιν ἀποσφίγγουσιν. τῶν δὲ ἐπειλήσεων τὸ μεταξὺ διάστημα οὐ πλεῖον γίνεται παλαιστῶν τεσσάρων, καὶ οὕτως εὐτονώτερόν τε γίνεται τὸ ξύλον καὶ αἱ τοῦ ὅπλου ἐπειλήεις ὡς περίβασμοι τοῖς ἐργαζομένοις καὶ βουλομένοις εἰς τὸ ἄνω μέρος ἐργάζεσθαι εὔχρηστοι γίνονται. ἐὰν δὲ μὴ ᾖ εὔτονον τὸ ξύλον, ἐκ πλειόνων συμβλητὸν γίνεται. στοχάζεσθαι δεῖ τῶν μελλόντων βαστάζεσθαι φορτίων, ὅπως μὴ ἀστεγέστερον τὸ κῶλον ὑπάρχει. ἵσταται οὖν τὸ κῶλον ὀρθὸν ἐπί τινος ξύλου καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ ὅπλα ἐκδύνεται τρία που ἢ τέσσαρα, καὶ ἀποτεθέντα ἀποδίδοται πρός τινα μένοντα χωρία, ὅπως τὸ ξύλον, ὅπου ἂν τις βιάζηται, μὴ παραχωρῇ κατεχόμενον ὑπὸ

[1]) Die Hdsch. hat: ἑκατερ . . . γωνιῶν ξύλον. Command. übersetzt: ex quatuor lignis.

τῶν ἀποτεταμένων ὅπλων. ἐκ δὲ τοῦ ἄνω μέρους αὐτοῦ πολύσπαστα ἐξάψαντες καὶ ἀποδιδόντες εἰς τὸ φορτίον ἐπισπῶνται ἤτοι ἀπὸ χειρὸς [ἢ] εἰς ἐργάτας ἀποδόντες καὶ ὅταν μετεωρισθῇ τὸ φορτίον καὶ δέῃ τὸν λίθον ἐκτεθῆναι ἐπὶ τεῖχος ἢ ὅπου βούλεταί τις, ἐκλύσαντες ἓν τῶν ἐκδεδυμένων ἐκ τοῦ ἄκρου ὅπλων τὸ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ φορτίου κείμενον ἐγκλίνουσι τὸ κῶλον. ἢ τὰς σκυτάλας ὑποβάλλοντες ὑπὸ τὸ φορτίον ἐν τοῖς μέρεσιν, ἐν οἷς ἡ σφενδόνη ἐν τῷ λίθῳ οὐκ ἐπειλῆται. χαλῶσι τὰ ἀγόμενα τῶν πολυσπάστων ἄχρις ἂν ἐπικαθήσῃ τὸ φορτίον ταῖς σκυτάλαις· εἶτα ἐκλύσαντες τὴν σφεδόνην μοχλεύουσι τὸ φορτίον ἄχρις οὗ εἰς ὃν βούλονται τόπον παραξῶσιν. εἴτε πάλιν τὸ ὑποκείμενον τῷ κώλῳ ξύλον ὅπλων ἐπισπασάμενοι ἀπὸ χειρὸς περιάγουσιν ἐπὶ ἕτερον μέρος τοῦ οἰκοδομήματος ἅμα ἀνιέντες ...... [1]) καὶ πάλιν ἐκδήσαντες χρῶνται ὡς προείρηται.

Τέλος.

---

[1]) Die Hdsch. hat *τοῦ ἀποτόμους*, *Command.* übersetzt: funes.